Aufgabe 1: Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{C}^2$ über dem Körper $\mathbb{C}$ und versuchen darauf mittels

$$g\left(\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}\right) = z_1 c_1 + z_2 c_2$$

ein Skalarprodukt zu definieren. Welche Eigenschaften (G1)-(G4) eines Skalarproduktes werden nicht erfüllt?

Aufgabe 2: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

Aufgabe 3: Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

a) Drücken Sie

$$\det \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

durch 2×2 Determinanten aus.
Tipp:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e & f \\ 0 & 0 & g & h \end{pmatrix}$$

b) Nutzen Sie das Ergebnis aus a) um das Charakteristische Polynom von A als Produkt zweier quadratischer Polynome zu schreiben.

c) Bestimmen Sie nun die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.
Tipp: Sie kennen die 2×2 Blöcke bereits aus anderen Übungen bzw. Beispielen.

Aufgabe 4: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tipps: Die Eigenwerte von A sind ganzzahlig.
Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.