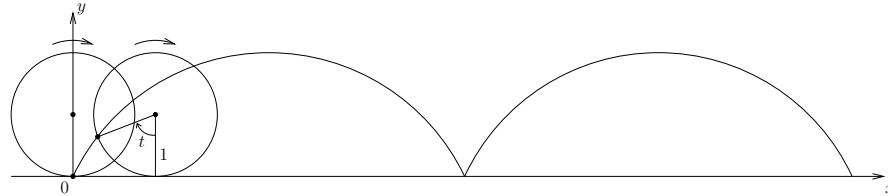


Aufgabe 1: Konstruieren Sie die Parametrisierung der abgebildeten Kurve. Diese entsteht, indem ein Kreis von Radius 1 gleichmäßig die x -Achse entlang rollt.



- Geben Sie zunächst die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung des Kreismittelpunktes beschreibt.
- Geben Sie anschließend die Parametrisierung der Kurve an, die die Bewegung eines Punktes auf einem im Uhrzeigersinn rotierenden Kreis mit festem Mittelpunkt $(0, 0)$ beschreibt.
- Geben Sie die Parametrisierung der oben abgebildeten und beschriebenen Kurve an, indem sie die Lösungen aus Aufgabenteil a) und b) addieren.
- Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die Länge der Kurve, die bei einer Umdrehung des Kreises entsteht.

Tipp: $\cos(t) = \cos^2\left(\frac{t}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{t}{2}\right)$

Aufgabe 2: Betrachten Sie die folgende Kurve:

$$\gamma(t) = e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{10}, \quad t \in [0, T]$$

- Skizzieren Sie die Kurve.
Tipp: Berechnen Sie $\gamma(0)$, $\gamma(2\pi)$, $\gamma(4\pi)$, $\gamma(6\pi)$ mit Hilfe eines Taschenrechners.
- Berechnen Sie den Betrag der Geschwindigkeit.
- Bestimmen Sie die Länge der Kurve $l(T)$.
- Was ist der Grenzwert von $l(T)$ für $T \rightarrow \infty$.

Aufgabe 3: Betrachten Sie für $a > 0$ folgende Kurve:

$$\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(\cos(t))^3 \\ a(\sin(t))^3 \end{pmatrix}$$

- a) Berechnen Sie die Länge von γ über dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$.
- b) Berechnen Sie für $t \in (0, \frac{\pi}{2})$ die folgenden Grenzwerte:

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|} \quad \lim_{t \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\dot{\gamma}(t)}{\|\dot{\gamma}(t)\|}$$

- c) Skizzieren Sie $\gamma(t)$ für $t \in [0, 2\pi]$ und $a = 1$.
Tipp: Benutzen Sie hierfür die obigen Grenzwerte, Werte an $t = 0$, $t = \frac{\pi}{4}$, $t = \frac{\pi}{2}$ sowie Symmetrieüberlegungen.

Aufgabe 4: Sei d eine positive reelle Zahl (eine zu messende Länge in Metern).

a) Wir betrachten die beiden Punkte

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{d}{2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass der Abstand der beiden Punkte gleich d ist.

b) Wir betrachten die Kurve $\bar{\Gamma}$, definiert durch

$$\bar{\gamma} : \left[-\frac{d}{2}, \frac{d}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \bar{\gamma}(t) = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\bar{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\bar{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

c) Sei

$$R = \frac{6,37 \cdot 10^6}{0,13}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sqrt{R^2 - \frac{d^2}{4}} \end{pmatrix}, \quad T = \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right).$$

Wir betrachten die Kurve $\tilde{\Gamma}$, definiert durch

$$\tilde{\gamma} : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \tilde{\gamma}(t) = M + R \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass $\tilde{\Gamma}$ die Punkte A und B verbindet.

Berechnen Sie die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Um welche Kurve handelt es sich?

d) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.

e) Welche Kurve ist länger?

Wie groß ist die Längendifferenz für $d = 100; 1000; 10000$ [m]?

Wie groß ist der Abstand $\|\tilde{\gamma}(0) - \bar{\gamma}(0)\|$ für diese Werte von d ?

f) $L(d) = 2R \arcsin\left(\frac{d}{2R}\right)$ ist die Länge von $\tilde{\Gamma}$.

Berechnen Sie die Taylor-Entwicklung von $\arcsin(x)$ um $x = 0$ mit Fehlerterm vierter Ordnung.

Verwenden Sie diese, um eine Näherungsformel für die Längendifferenz zu finden.

Vergleichen Sie deren Ergebnisse mit den exakten Ergebnissen für $d = 100; 1000; 10000$ [m].