Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2013**
Blatt 14 (Repetitorium) **19.07.2013**

Aufgabe 53:

a) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^1 \frac{x+3x^3}{1+x^2}\,dx$.

Tipp: Bringen Sie den Integranden in die Form $p + \frac{f'}{f}$.

b) Berechnen Sie das Integral $\int\limits_0^\pi x\,\sin x\,dx$.

c) Differenzieren Sie die Funktion $f(t) = \int_0^{2t} \sin(t+s)\,ds$.

Aufgabe 54:

a) Geben Sie die Regel für die Multiplikation $(x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ in $\mathbb{C}$ an.

b) Geben sie für die folgenden komplexen Zahlen eine Darstellung $re^{i\varphi}$ mit $r \geq 0$ an:

(i) $2 - 2i$

(ii) -5 .

c) Berechnen Sie $(\sqrt{2} - \sqrt{2}i)^{10}$.

d) Weisen Sie das Additionstheorem des Kosinus

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

nach. Verwenden Sie hierzu die Darstellung

$$e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i\,\sin(\varphi).$$

Tipp: Stellen Sie zunächst $\cos(\varphi), \sin(\varphi)$ über Terme vom Typ $e^{i\varphi}$ dar.

e) Bestimmen Sie die beiden komplexen Lösungen der Gleichung

$$z^2 + z + 1 - i = 0.$$

Aufgabe 55: a) Gegeben sei die folgende Matrix:

$$A := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 2 & 0 \\ -\frac{3}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie die Diagonalisierung $A = QDQ^T$ mit einer Diagonalmatrix D und einer orthogonalen Matrix Q. Geben Sie die Eigenwerte von A an.

b) Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ habe die beiden noch nicht normierten Eigenvektoren:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } -1$$

und

$$\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ zum Eigenwert } 3.$$

Geben Sie eine (der beiden) Möglichkeiten an, wie die Matrix $2^A = e^{(\ln 2)A}$ aussehen kann.

Aufgabe 56: a) Geben Sie eine Spiegelung an einer Ebene im $\mathbb{R}^n$ mit Normalenvektor v als lineare Abbildung oder Matrix an.

b) Geben Sie eine Drehung in der $x_1 - x_3-$ Ebene des $\mathbb{R}^3$ um den Winkel α an.

c) Geben Sie zu beiden Matrizen die Inverse an.

Aufgabe 57: a) Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} \dot{r}(t) &= -\frac{1}{r(t)} \\ r(0) &= 1. \end{aligned}$$

b) Geben Sie für die numerische Lösung der Differentialgleichung $\dot{x}(t) = \frac{1}{\cos x(t)}$ mit $x(0) = x_0$ ein Verfahren zweiter Ordnung an.

Aufgabe 58: a) Geben Sie die Definition des Begriffs orthogonale Matrix an.

b) Welche geometrische Bedeutung hat die Anwendung der folgenden Matrix?

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Aufgabe 59: Bestimmen Sie das Volumen des folgenden Körpers

$$K = \{ \ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid -1 \le x \le 1, \quad y^2 + z^2 \le e^{2x} \ \}.$$

Aufgabe 60: Gegeben sei das Anfangswertproblem

$$\begin{array}{rclcrcl} x_1'(t) & = & 8x_1(t) + 6x_2(t), & \qquad & x_1(0) & = & 1, \\ x_2'(t) & = & -9x_1(t) - 7x_2(t), & \qquad & x_2(0) & = & 2. \end{array}$$

a) Das System kann in Matrizenform

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$$

geschrieben werden. Geben Sie die Matrix $\mathbf{A}$ und den Vektor $\mathbf{a}$ an.

b) Berechnen Sie die Lösung mit Hilfe der Exponentialfunktion $\exp \mathbf{A}t$.

Aufgabe 61: Berechnen Sie die Länge zweier Kurven auf der Erdoberfläche (im Kugelmodell), die St. Petersburg ($60°N$, $30°O$) mit Anchorage in Alaska ($60°N$, $150°W$) verbinden.

- Geben Sie die Koordinaten φ und ϑ (bzgl. der Parametrisierung aus der Vorlesung) der beiden Punkte im Bogenmaß an.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang des gemeinsamen Breitenkreises verbindet.
- Geben Sie eine Parametrisierung der Kurve (im Parameterbereich) an, die die beiden Punkte entlang zweier Meridiane über den Nordpol verbindet. Hinweis: Im Parameterbereich besteht die Kurve aus zwei Teilen.
- Berechnen Sie die Länge der beiden Kurven.

Aufgabe 62: Sie befinden sich auf der Bonner Hofgartenwiese an der Position $50°42'57''N, 7°6'16''O$ in einer Höhe von 64 Metern. Wo befindet sich (relativ zu Ihnen) der Punkt mit den kartesischen Koordinaten $Y = \begin{pmatrix} 4\,001\,331 \\ 498\,963 \\ 4\,932\,630 \end{pmatrix}$?
Betrachten Sie die Erde als Kugel mit Radius 6371 km, berechnen Sie die Tangentialebene an die Sphäre an Ihrer Position und projizieren Sie den gesuchten Punkt orthogonal auf die Tangentialebene. Wählen Sie die Basis der Tangentialebene so, dass sie die Abstände in Nord- und Ost-Richtung direkt aus den Koeffizienten der Projektion ablesen können.