Wissenschaftliches Rechnen II

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Burstedde
Patrick Diehl

universitätbonn

Übungsblatt 2. Abgabe am **Dienstag (30.04.2013) vor der Vorlesung**.

Aufgabe 4. (Reduktion des Fehlers [4 Punkte])

Für die Diskretisierung der Poissionsgleichung hat die Iterationsmatrix folgende Eigenwerte:

$$\begin{aligned} \lambda_{kl} &= \frac{1}{2}\cos(\frac{k\pi}{m}) + \frac{1}{2}\cos(\frac{l\pi}{m}) \quad \text{für } \omega = 1 \\ \lambda_{kl} &= \frac{1}{4}\cos(\frac{k\pi}{m}) + \frac{1}{4}\cos(\frac{l\pi}{m}) + \frac{1}{2} \quad \text{für } \omega = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Betrachten Sie die Reduktion des Fehlers nach einer, 10 und 11 Iterationen und erläutern Sie kurz das Verhalten der Fehlerreduktion.

Aufgabe 5. (Sobolev-Räume [8 Punkte])

Zeigen Sie, dass für die Skala der Sobolev-Räume folgende Eigenschaft für $s = 0$ und $s = 1$ gilt:

$$\|\nu\|_{s,\Omega}^2 \leq \|\nu\|_{s-1,\Omega}\|\nu\|_{s+1,\Omega}$$

Aufgabe 6. (Skalen [8 Punkte])

Sei A positiv definit und $B = (\mathbb{1} + A)^{-1}A$. Zeigen Sie, dass in der von A erzeugten Skala gilt:

$$|||Bx|||_s \leq |||x|||_s \quad \forall s \in \mathbb{R}$$

Programmieraufgabe 1. (SSOR-Verfahren)

Bei der Programmieraufgabe soll die Poissionsgleichung im Einheitsquadrat gelöst werden.

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega = (0,1)^2 \\ u &= 0 \quad \text{in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Das Gebiet wird mit einem gleichmäßigen Dreiecksnetz überzogen. Das Einheitsquadrat wird zunächst in gleichgroße Quadrate der Seitenlänge h unterteilt. Jedes dieser Quadrate wird entlang der Diagonalen in zwei Dreiecke unterteilt. Es gilt:

$$S_h = \{\nu \in \mathcal{C}(\overline{\Omega});\, \nu \text{ in jedem Dreieck linear und } \nu = 0 \text{ auf } \partial\Omega\}.$$

1. Zeigen Sie, dass stückweise lineare Elemente über diese Dreieckszerlegung auf den 5-Punkte-Stern führen.
2. Lösen Sie das Gleichungssystem für $f = \pi^2 u + 2sin(\pi x)$ mit $u = sin(\pi x)y(1-y)$ mit dem SSOR-Verfahren und vergleichen Sie die Konvergenzraten bezüglich des L_2- und H_1-Fehlers für die Dämpfungsparameter $\omega = 1.0, 1.3, 1.6$. Es gilt für den Startwert $x_0 = 0$.

Vorzuzeigen in der Übung am 08.05.2013