Wissenschaftliches Rechnen II

Sommersemester 2013
Prof. Dr. Burstedde
Patrick Diehl

Übungsblatt 4. Abgabe am **Dienstag (14.05.2013) vor der Vorlesung**.

Aufgabe 10. (Lineare und nichtlineare Mehrgitteriteration [8 Punkte])

Zeigen Sie, dass der Algorithmus für die nichtlineare Mehrgitteriteration (1.34) für lineare Probleme äquivalent zum Algorithmus der Mehrgitteriteration (1.12) ist.

Hinweis:
Die Zahlen in den Klammern verweisen auf den jeweiligen Algorithmus im Tafelaufschrieb.

Aufgabe 11. (Konvergenz der 2–Level–Methode [8 Punkte])

Es gelte nun die Glättungseigenschaft sowie die Approximationseigenschaft für alle Level $k \geq 1$. Zeigen Sie, dass dann die 2–Level Methode konvergiert, d.h. zu gegebenem Zielfehler $0 < \xi < 1$ existiert eine untere Anzahl Iterationen $\underline{\nu} \in \mathbb{N}$, so dass der Fehlerpropagationsoperator beschränkt ist durch

$$\|(I_k - PA_{k-1}^{-1}RA_k) \cdot (I_k - C_kA_k)^\nu\|_2 \leq c \cdot \eta(\nu) \leq \xi \text{ für alle } \nu \geq \underline{\nu}, k \geq 1.$$

Dabei ist $\eta(\nu) \overset{\nu\to\infty}{\longrightarrow} 0$ aus der Glättungseigenschaft gegeben.

Aufgabe 12. (Blockzerlegung [4 Punkte])

Betrachten Sie eine 2x2-Blockzerlegung der Matrix A,

$$Au = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix} = f.$$

Führen Sie explizite Block-Zeilenumformungen durch, um A^{-1} in Blockgestalt herzuleiten. Setzen Sie dabei die Existenz von

$$A_S = A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$$

und A_S^{-1} voraus. Lesen Sie am Ergebnis ab, dass A^{-1} symmetrisch ist, wenn A symetrisch ist.

Programmieraufgabe 2. (Mehrgitter-Verfahren)

Lösen Sie das Problem aus der Programmieraufgabe auf Blatt 2 diesmal mit dem PCG-Verfahren, bei dem mit einem Mehrgitter-V-Zyklus vorkonditioniert wird. Verwenden Sie im Mehrgitter eine SSOR-Iteration als Glätter. Untersuchen Sie folgende Fragen:

- Ist die Laufzeit pro CG-Iteration proportional zur Anzahl der Unbekannten?
- Ist die Anzahl der GC-Iterationen zur Reduktion des (vorkonditionierten) Residuums um einen gegebenen Faktor unabhängig von der Gitterweite h?
- Fallen die Konvergenzraten der L_2- und H_1-Fehler gegen h wie erwartet aus?

Hinweis:
Wählen sie für ω den Wert, der als Löser die besten Resultate geliefert hat. Das gröbste Gitter besteht aus acht Dreiecken und hat nur einen Freiheitsgrad, daher reicht ein Glättungsschritt zur exakten Lösung aus.

Vorzuzeigen in der Übung am 28.05.2013