Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 10.

Abgabe am **Montag, 23.6.2014**

Aufgabe 39. (Stückweise lineare Interpolation) (4 Punkte)

Sei $s \in S_1(T_n)$ und $f, g \in C([a,b])$ stetig differenzierbar auf jedem Teilintervall $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 0, \ldots, n$, und $f(x_j) = s(x_j)\ \forall\, j$. Wir definieren das „Energie"-Skalarprodukt $\langle f, g \rangle := \int_a^b f'(x) g'(x)\, dx$. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) Bezüglich des Energie-Skalarprodukts ist jedes $p \in S_1(T_n)$ orthogonal zu $f - s$.

b) Es gilt
$$\int_a^b s'(x)^2\, dx \le \int_a^b f'(x)^2\, dx.$$

c) Es gilt
$$\int_a^b ((f-s)'(x))^2\, dx \le \int_a^b ((f-p)'(x))^2\, dx \quad \forall\, p \in S_1(T_n).$$

Aufgabe 40. (Anwendung von Quadraturformeln) (7 Punkte)

Betrachten Sie das Integral
$$I(f) = \int_0^2 \frac{2}{x^2+4}\, dx.$$

a) Berechnen Sie $I(f)$ mit der Trapezregel und der Simpson-Regel.

b) Schätzen Sie jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

c) Berechnen Sie $I(f)$ mit der Trapezsumme und der Simpson-Summe für $h = \frac{1}{2}$.

d) Schätzen Sie auch hier jeweils den Integrationsfehler ab und vergleichen Sie die Abschätzung mit dem wirklichen Fehler.

e) Wie klein müsste h jeweils gewählt werden, damit der Integrationsfehler kleiner als 10^{-6} wird?

Aufgabe 41. (Symmetrische Quadratur) (5 Punkte)

Sei $[a,b] \subset \mathbb{R}$ und $Q(f) = \sum_{i=0}^m w_i f(x_i)$ eine Interpolationsquadraturformel mit Stützstellen, die symmetrisch zum Intervallmittelpunkt verteilt sind, d.h. für die $x_i + x_{m-i} = a + b$ gilt. Zeigen Sie die folgenden Aussagen.

a) $w_i = w_{m-i}$ für alle $0 \le i \le m$, d.h. Q ist symmetrisch.

b) Ist $m \in \mathbb{N}$ gerade, so ist Q sogar auf Π_{m+1} exakt.

Programmieraufgabe 4. (Numerische Quadratur) (12 Punkte)

Eine eindimensionale Funktion im Intervall $[a, b]$ sei als separate Unterroutine gegeben. Schreiben Sie jeweils ein Programm zur Berechnung des Integrals dieser Funktion

a) mittels Trapezsumme mit Maschenweite $(b-a)/n$ für beliebiges $n \in \mathbb{N}$ und

b) mittels m Romberg-Extrapolationsschritten (d.h. $2^{m-1}+1$ Stützstellen in Schritt m) mit Hilfe der Trapezsummen von Aufgabe a). Der Fall $m = 1$ entspricht somit der Trapezregel ($n = 1$). Mehrfache Funktionsauswertungen an derselben Stelle sind zu vermeiden.

Setzen Sie nun das Romberg-Verfahren zur Berechnung des natürlichen Logarithmus $\ln(x) = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt$ für $x > 0$ ein. Hierzu sollen nur die Grundrechenoperationen verwendet werden.

c) Berechnen Sie $\ln(x)$ näherungsweise für $x = 10^k$ mit $k = -6, -4, -2, 0, 2, 4, 6$ und $m = 1, 2, \ldots, 6$.

d) Plotten Sie den Aufwand (die Zahl der benötigten Grundrechenoperationen) N gegen den Fehler ε für die verschiedenen k und m in einen Plot. Verbinden Sie dabei die Fehler für gleiches k. Verwenden Sie eine logarithmische Skala auf beiden Achsen.

e) Ermitteln Sie graphisch die ungefähren Konvergenzraten α, wobei $\varepsilon \approx cN^{-\alpha}$ für die verschiedenen Werte von x. Eine Halbierung des Fehlers bei einer Verdoppelung des Aufwands entspricht einer Konvergenzrate von 1. In einem Log-Log-Plot entspricht die Steigung einer Geraden durch die verschiedenen Fehler (bei gleichem x) der Konvergenzrate. Ermitteln Sie so auch die jeweiligen Fehlerkonstanten c.

f) Für welche Werte von x liefert die Romberg-Extrapolation eine gute Näherung für $\ln(x)$? Begründen Sie dieses Verhalten auch theoretisch.

Abgabe **Mo 30.6.** bis **Fr 4.7.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
Ab Mo 23.6. hängen Terminlisten aus, in die Sie sich bitte in Zweiergruppen eintragen. Für Vormittagstermine befindet sich die Liste im CIP-Pool der Endenicher Allee, für Nachmittagstermine im CIP-Pool der Wegelerstraße (dort finden dann auch jeweils die Abgaben statt).

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte Theorie + 12 Punkte Praxis