Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 11.

Abgabe am **Montag, 30.6.2014**

Aufgabe 42. (Romberg-Verfahren) (6 Punkte)

a) Erklären Sie anschaulich das Prinzip des Romberg-Verfahrens und verwenden Sie dazu eine Skizze, in die Sie die Maschenweite h gegen die Trapezsumme $T(h)$ einzeichnen.

b) Berechnen Sie

$$I(f) = \int_0^1 x^5 \, dx$$

mit Hilfe des Romberg-Verfahrens für die Schrittweiten $h_0 = 1$, $h_1 = \frac{1}{2}$ und $h_2 = \frac{1}{4}$.

c) Wie groß ist in diesem Fall der numerische Integrationsfehler?

d) Geben Sie die Integrationsformeln T_{21} und T_{22} an. Zeigen Sie, dass T_{22} der Milne-Regel entspricht.

Aufgabe 43. (Adaptive Quadratur) (7 Punkte)

Zur numerischen Berechnung des Integrals $I(f) = \int_a^b f(x)\, dx$ betrachte man die Simpson-Regel S sowie die Simpson-Summe S_2 zur Maschenweite $h = \frac{b-a}{4}$.

a) Berechnen Sie den Fehler der extrapolierten Regel

$$U = S_2 + \frac{S_2 - S}{15}.$$

b) Ein adaptives Quadraturverfahren verfeinere das Integrationsgebiet $[a, b]$, falls der Integrationsfehler zu groß ist. Warum eignet sich der Wert $|S_2 - S|$ als Fehlerschätzer?

c) Wir wollen nun $[a, b]$ in zwei Hälften $[a, (a + b)/2]$, $[(a + b)/2, b]$ verfeinern, falls

$$|S_2 - S| > \varepsilon(b - a),$$

und die beiden Teilintervalle separat integrieren. Dieser Vorgang wird rekursiv weitergeführt, falls der Fehler in dem jeweiligen Teilintervall immer noch zu groß ist. Integrieren Sie die Funktion $f(x) = \sqrt{|x|}$ im Intervall $[-1, 1]$ auf diese Weise adaptiv für $\varepsilon = 0.01$. Verwenden Sie jeweils U als endgültige Näherung der Teilintegrale.

d) Vergleichen Sie den geschätzen Integrationsfehler aus c) mit dem wahren Integrationsfehler.

e) Geben Sie eine Funktion f an, bei der obiges adaptives Verfahren scheitert, d.h. der wahre Integrationsfehler sehr viel größer als der geschätzte Integrationsfehler ist und das Verfahren zu früh abbricht.

Aufgabe 44. (Trigonometrische Interpolation) (7 Punkte)

Wir betrachten die 2π-periodische Fortsetzung der reellen Funktion

$$f(x) = \pi - |x| \quad \text{in} \quad [-\pi, \pi).$$

a) Die kontinuierliche Fourier-Transformation von f ist definiert durch

$$f(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} (\alpha_j \cos(jx) + \beta_j \sin(jx))$$

mit den Koeffizienten

$$\alpha_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx)\, dx \quad \text{und} \quad \beta_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx)\, dx.$$

Führen Sie die kontinuierliche Fourier-Transformation für obiges f durch. Konvergiert die Fourier-Reihe in diesem Fall punktweise gegen f?

b) Zeichnen (oder plotten) Sie f sowie die Entwicklungen von f in der Fourier-Reihe bis zum zweiten, dritten und vierten Term.

c) Führen Sie nun die diskrete Fourier-Transformation von f für $n = 8$ durch, d.h. bestimmen Sie die Koeffizienten a_k und b_k des trigonometrischen Interpolationspolynoms

$$P(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{3} (a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)),$$

wobei $P(x_k) = f(x_k)$ an den Stellen $x_k = -\pi + 2\pi k/8$ für $k = 0, \ldots, 7$.

d) Zeichnen (oder plotten) Sie f und P. Vergleichen Sie das Ergebnis der diskreten Fourier-Transformation mit dem aus Aufgabe b).

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte