Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 12.

Abgabe am **Montag, 7.7.2014**

Aufgabe 46. (Gibbs-Phänomen) (3 Punkte)

Die 2π-periodische Funktion definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{für } -\pi \le x < 0 \\ 1 & \text{für } 0 \le x < \pi \end{cases}$$

nennt man *Rechteckschwingung*.

a) Bestimmen Sie für die Rechteckschwingung die Fourier-Reihe

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) \quad \text{mit } n \to \infty.$$

b) Plotten Sie die Fourier-Reihe der Rechteckschwingung für $n = 1, 2, 3, 4, 5, 20$. Was fällt Ihnen an den Unstetigkeitsstellen auf?

Aufgabe 47. (Schnelle Fourier-Transformation) (4 Punkte)

Erklären Sie anschaulich das Prinzip der schnellen Fourier-Transformation.

Aufgabe 48. (Lineare Iteration) (5 Punkte)

Sei x die exakte Lösung von $Ax = b$ und $e^{(k)} = x^{(k)} - x$ der Iterationsfehler einer linearen Iteration

$$x^{(k+1)} = Mx^{(k)} + Nb, \quad k \ge 0.$$

a) Zeigen Sie, dass die lineare Iteration mit dem Startwert $x^{(0)}$ die Iterierten

$$x^{(k)} = M^k x^{(0)} + \sum_{j=0}^{k-1} M^j N b$$

liefert.

b) Zeigen Sie, dass sich der Iterationsfehler als

$$e^{(k+1)} = Me^{(k)} = M^{k+1} e^{(0)}$$

darstellen lässt.

c) Sei M regulär und $\rho(M) < 1$. Zeigen Sie, dass die lineare Iteration gegen die eindeutige Lösung von $Ax = b$ konvergiert.

Aufgabe 49. (Satz von Gerschgorin) (4 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass alle Eigenwerte einer Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ in der Vereinigung der sogenannten *Gerschgorin-Kreise*

$$K_i := \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; |z - a_{ii}| \leq \sum_{j=1, j\neq i}^{n} |a_{ij}| \right\}, \quad i = 1, \dots, n$$

liegen. *Hinweis:* Betrachten Sie zu gegebenem Eigenwert λ einen Eigenvektor x mit normierter maximaler Komponente $|x_i| = 1$.

b) $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sei symmetrisch und strikt diagonaldominant mit positiven Diagonaleinträgen, d.h. $a_{ii} > \sum_{j=1,j\neq i}^{n} |a_{ij}|$. Zeigen Sie, dass A positiv definit ist.

Programmieraufgabe 5. (Iterationsverfahren) (12 Punkte)

a) Schreiben Sie je eine Routine, die ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$ iterativ nach der Methode von Jacobi, Gauß-Seidel und SOR löst, wobei für den Relaxationsparameter von SOR $0 < \omega < 2$ gelte. Testen Sie Ihre drei iterativen Löser an der 16×16-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} T & -I & & \\ -I & T & -I & \\ & -I & T & -I \\ & & -I & T \end{pmatrix}, \quad \text{wobei} \quad T = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 8 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

und I die 4×4-Identität ist. Wählen Sie als rechte Seite $b = (b_1 \; b_2 \; b_2 \; b_1)^T \in \mathbb{R}^{16}$ mit $b_1 = (6, 5, 5, 6)^T \in \mathbb{R}^4$ und $b_2 = (5, 4, 4, 5)^T \in \mathbb{R}^4$ und als Startiterierte jeweils $x^{(0)} = (0, \dots, 0)^T$. Die Ausgabe des Programms soll den jeweiligen Lösungsvektor sowie die Anzahl der nötigen Iterationen beinhalten, bis das Verfahren konvergiert ist. Dabei soll die Iteration abgebrochen werden, falls für das Residuum

$$\|Ax^{(k)} - b\|_2 \leq 10^{-10} \|Ax^{(0)} - b\|_2$$

gilt.

b) Für den optimalen Relaxationsparameter des SOR-Verfahrens gilt

$$\omega_{opt}(A) = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(M_J)}}$$

mit $M_J := D^{-1}(L + R)$ für die Zerlegung von $A = D - L - R$, wobei $D = \operatorname{diag}(A)$, L linke untere und R rechte obere Dreiecksmatrix ist. Schätzen Sie den Spektralradius $\rho(M_J)$ mit dem Satz von Gerschgorin ab und verwenden Sie ω_{opt} in Ihrem Programm.

Abgabe **Mo 14.7.** bis **Fr 18.7.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
Ab Mo 7.7. hängen Terminlisten aus, in die Sie sich bitte in Zweiergruppen eintragen. Für Vormittagstermine befindet sich die Liste im CIP-Pool der Endenicher Allee, für Nachmittagstermine im CIP-Pool der Wegelerstraße (dort finden dann auch jeweils die Abgaben statt).

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte Theorie + 12 Punkte Praxis