Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 13.

Abgabe am **Montag, 14.7.2014**

Aufgabe 50. (Konvergenz des Gauß-Seidel-Verfahrens) (4 Punkte)

Beweisen Sie mittels Widerspruch, dass das Gauß-Seidel-Verfahren für alle strikt diagonaldominanten Matrizen A konvergiert.
Hinweis: Nehmen Sie an, dass die Iterationsmatrix M_{GS} mindestens einen Eigenwert λ mit $|\lambda| \geq 1$ besitzt und y der zugehörige Eigenvektor zu λ ist. Wieso folgt aus der Eigenwertgleichung, dass die Annahme falsch sein muss?

Aufgabe 51. (Jacobi-Überrelaxation) (6 Punkte)

Zu einem linearen Iterationsverfahren der Form $\phi(x^{(k)}) = Mx^{(k)} + Nb$ definieren wir das zugehörige *relaxierte Iterationsverfahren zu* $\omega \in \mathbb{R}$ mittels der Konvexkombination $x^{(m+1)} := \omega\phi(x^{(m)}) + (1-\omega)x^{(m)}$. Das Ziel dieser Relaxation ist die Verbesserung der Konvergenzgeschwindigkeit des ursprünglichen Verfahrens, ω heißt auch *Dämpfungsparameter*. Gegeben sei nun das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit einer symmetrischen Matrix $A = D-L-R$ mit Einheitsdiagonale $D = I$ und Eigenwerten $0 < \lambda_1 \leq \ldots \leq \lambda_n$.

a) Geben Sie das zum Jacobi-Verfahren gehörige relaxierte Iterationsverfahren durch seine Iterationsmatrix M_ω an.

b) Zeigen Sie, dass das relaxierte Jacobi-Verfahren für A genau dann konvergiert, wenn $0 < \omega < 2/\lambda_n$ gilt.

c) Bestimmen Sie den optimalen Relaxationsparameter ω_{opt}, für welchen $\rho(M_\omega)$ minimal wird. Berechnen Sie auch den Wert des Spektralradius $\rho(M_{\omega_{opt}})$.

Aufgabe 52. (Newton-Verfahren) (3 Punkte)

Gegeben sei das nichtlineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} (x-1)y^2 &= 0, \\ x(x-2)(y+2) &= 0. \end{aligned}$$

a) Bestimmen Sie die exakte Lösung dieses Systems.

b) Geben Sie die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens an und führen Sie ausgehend vom Startwert $(x^{(0)}, y^{(0)}) = (1,1)$ den ersten Iterationsschritt durch.

Aufgabe 53. (Inversion und Division) (7 Punkte)

Wir wollen nun das Newton-Verfahren zur Berechnung von $x = 1/a$ mit $a \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ betrachten, d.h. wir suchen die Nullstelle von $f(x) = 1/x - a$.

a) Zeigen Sie, dass die zugehörige Iterationsvorschrift die Gestalt

$$x_{k+1} = x_k + x_k(1 - ax_k) \quad \text{für } k \geq 0$$

hat. Mit welchen arithmetischen Operationen kann man somit die Division b/a approximieren?

b) Zeigen Sie, dass für den Fehler $\varepsilon_k = x_k - 1/a$ die Rekursion $\varepsilon_{k+1} = -a\varepsilon_k^2$ gilt. Welche Vorzeichen haben $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$?

c) Beweisen Sie durch vollständige Induktion

$$\varepsilon_k = -\frac{1}{a}\rho^{2^k} \quad \text{mit } \rho = |ax_0 - 1|.$$

Welche Bedingung für ρ bzw. x_0 ist hinreichend und notwendig für die Konvergenz des Iterationsverfahrens? Wie groß ist die Konvergenzrate?

d) Es sei $1/2 \leq a \leq 1$ und $x_0 = 3/2$. Bestimmen Sie die (maximale) Anzahl der erforderlichen Additionen und Multiplikationen zur Berechnung von $1/a$ auf 24 bzw. 56 Dualstellen.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte

Offensichtliche Wiederholungsaufgabe

Aufgabe 54. (Zusammenfassung des Stoffs) (keine Punkte)

Schreiben Sie *unter sparsamer Verwendung von Formeln* eine jeweils etwa einseitige Zusammenfassung folgender in der Vorlesung behandelter Schwerpunkte.
Stochastik:

1. Kombinatorik, bedingte Wahrscheinlichkeiten, Unabhängigkeit.
2. Zufallsvariablen, Erwartungswert, Varianz.
3. Monte Carlo-Verfahren, Pseudozufallszahlen.
4. Diskrete und stetige Verteilungen.
5. Markov-Ketten.

Numerik:

1. Polynominterpolation.
2. Numerische Quadratur.
3. Trigonometrische Interpolation.
4. Iterationsverfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme.
5. Iterationsverfahren zur Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme.