Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 2.

Abgabe am **Mittwoch, 23.4.2014**

Aufgabe 5. (σ-Additivität) (4 Punkte)

Sei Ω eine Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit den folgenden Eigenschaften:

- $P(\Omega) = 1$ und $P(A) \geq 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}$.
- P ist *additiv*, d.h. für paarweise disjunkte $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ gilt $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$.
- P ist *von unten stetig*, d.h. für jede aufsteigende Folge $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset \Omega$, $A_i \in \mathcal{A}$ gilt $P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$.

Beweisen Sie, dass P dann auch σ-additiv ist.

Aufgabe 6. (Sieb) (4 Punkte)

Ein unendliches Gitter bestehe aus rechtwinklig in einer Ebene angeordneten Zylinderstäben der Dicke d. Der Abstand der Stabachsen betrage a in x-Richtung sowie b in y-Richtung. Eine Kugel mit dem Radius r werde zufällig senkrecht von oben auf das Gitter fallengelassen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Kugel durch das Gitter fällt, ohne einen Stab zu berühren?

Aufgabe 7. (Geburtstagsparadoxon) (4 Punkte)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von n Personen mindestens zwei am selben Tag Geburtstag haben? Ab welcher Anzahl n ist es sogar wahrscheinlicher, dass mindestens zwei Geburtstage zusammenfallen? Vernachlässigen Sie den 29. Februar.

Aufgabe 8. (Lotto) (4 Punkte)

Konstruieren Sie einen geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum, der das Zahlenlotto „6 aus 49 mit Ziehen einer Zusatzzahl“ beschreibt. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Tipp 6 Richtige bzw. 5 Richtige mit Zusatzzahl bzw. 5 Richtige ohne Zusatzzahl zu haben, und zeigen Sie, dass sie sich wie 1 : 6 : 252 verhalten.

Aufgabe 9. (Binomialkoeffizienten) (4 Punkte)

Zeigen Sie für $n, k \in \mathbb{N}_0$:

a) $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$.

b) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte