Algorithmische Mathematik II, Stochastik für Lehramt

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 5.

Abgabe am **Montag, 12.5.2014**

Aufgabe 18. (Kovarianz und Korrelationskoeffizient) (2 Punkte)

Seien $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ reellwertige Zufallsvariablen mit positiven Varianzen und Kovarianzen. Zeigen Sie:

a) $\operatorname{Cov}(aX + b, Y) = a \operatorname{Cov}(X, Y)$.

b) $\operatorname{Cov}(X, X) = \sigma^2(X)$.

c) Ist $Y = aX + b$ mit $a \neq 0$, so folgt $|\rho(X, Y)| = 1$.

Aufgabe 19. (Erwartungswert und Varianz) (4 Punkte)

Ein Zeitschriftenverlag startet eine Marketingaktion für eine Musikzeitschrift, bei der die ersten 5000 Besteller eines Probeabonnements eine von zwei aktuellen CDs erhalten sollen. Die Kunden können dabei ihre Wunsch-CD auf dem Bestellzettel vermerken. Beide CDs sind gleich populär. Berechnen Sie, wie viele Exemplare der beiden CDs auf Lager sein müssen, damit die ersten 5000 Besteller mit 99%-iger Sicherheit ihre Wunsch-CD sofort erhalten.

Aufgabe 20. (Geburtenverteilung) (6 Punkte)

Die Gesamtzahl G der Geburten pro Woche in einem Krankenhaus sei Poisson-verteilt mit Parameter λ. Weiterhin sei jede Geburt, unabhängig von anderen Geburten und von deren Gesamtzahl, mit Wahrscheinlichkeit p ein Junge und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1 - p$ ein Mädchen. Wir beschreiben die Anzahl der pro Woche geborenen Jungen bzw. Mädchen durch Zufallsvariablen J und M.

a) Zeigen Sie

$$P(J = j, M = m) = \frac{(\lambda p)^j \mathrm{e}^{-\lambda p}}{j!} \cdot \frac{(\lambda q)^m \mathrm{e}^{-\lambda q}}{m!}.$$

b) Folgern Sie, dass J und M unabhängig und Poisson-verteilt mit Parametern λp bzw. λq sind.

Aufgabe 21. (Hypergeometrische Verteilung) (4 Punkte)

Die Zufallsvariable X sei hypergeometrisch verteilt, $X \sim H(n, N, M)$. Zeigen Sie, dass für festes $n \in \mathbb{N}$ und $N, M \to \infty$ mit $p = \frac{M}{N}$ fest die hypergeometrische Verteilung gegen die Binomialverteilung konvergiert

$$H(n, N, M) \to \operatorname{Bin}(n, p).$$

Was bedeutet dies anschaulich?

Aufgabe 22. (Schwaches Gesetz der großen Zahlen) (8* Punkte)

Achtung: Die Bearbeitung dieser Aufgabe ist optional. Die Punkte zählen als Bonuspunkte, mit denen Defizite ausgeglichen werden können.

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $E(X_i) = m$ und $\mathrm{Var}(X_i) = \sigma^2$. Es gelte

$$|\mathrm{Cov}(X_i, X_j)| \leq r(|i-j|)$$

für eine Funktion $r : \mathbb{Z}_+ \to [0, \infty)$. Finden Sie Bedingungen für r, also Bedingungen für das Abklingen der Korrelationen, unter denen immer noch die Aussage des schwachen Gesetzes der großen Zahlen gilt.

Programmieraufgabe 2. (Pseudozufallszahlen) (12 Punkte)

a) Implementieren Sie mit Mathematica einen linearen Kongruenzgenerator, der zu einem beliebigen Startwert $x_1 \in \mathbb{N}$, einem Multiplikator $a \in \mathbb{N}$ und einer großen Zahl $m \in \mathbb{N}$ eine Zufallsfolge nach der Vorschrift $x_i = (ax_{i-1}) \bmod m$, $i \geq 2$, generiert.

b) Implementieren Sie einen Fibonacci-Zufallszahlengenerator, der zu beliebigen Startwerten $y_1, y_2 \in \mathbb{N}$ und einer großen Zahl $m \in \mathbb{N}$ eine Zufallsfolge nach der Vorschrift $y_i = (y_{i-1} + y_{i-2}) \bmod m$, $i \geq 3$, generiert.

c) Erzeugen Sie je eine Liste mit $N = 10000$ Zahlen aus $\{0, \ldots, m-1\}$ mit den linearen Kongruenzgeneratoren ZX81 ($m = 2^{16} + 1,\ a = 75$), RANDU ($m = 2^{31},\ a = 65539$), dem Fibonacci-Generator ($m = 2^{31}$) sowie mit `RandomInteger` ($m = 2^{31}$).

d) Plotten Sie für alle vier Listen sowohl Tupel (x_i, x_{i+1}) als auch Tripel (x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) von Zufallszahlen skaliert auf $[0, 1]^n$, $n = 2, 3$. Verwenden Sie dazu `ListPlot` und `ListPointPlot3D`. Variieren Sie die Startwerte, m, a und N. Was können Sie über die Güte der Zufallszahlen aussagen?

Abgabe **Mo 19.5.** bis **Fr 23.5.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
Ab Mo 12.5. hängen Terminlisten aus, in die Sie sich bitte in Zweiergruppen eintragen. Für Vormittagstermine befindet sich die Liste im CIP-Pool der Endenicher Allee, für Nachmittagstermine im CIP-Pool der Wegelerstraße (dort finden dann auch jeweils die Abgaben statt).

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte Theorie + 12 Punkte Praxis