Übungsblatt 7.

Abgabe am **Montag, 26.5.2014**

Aufgabe 28. (Wettermodell) (4 Punkte)

In Anlehnung an das Bonner Wettermodell der Vorlesung modellieren wir das Wetter (an einem Tag) als Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \{\text{sonnig, bewölkt, regnerisch}\}$. Hierzu nehmen wir optimistischerweise die folgende Übergangsmatrix an:

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & 1/5 & 0 \\ 2/5 & 2/5 & 1/5 \\ 1/5 & 3/5 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Am Mittwoch, 14. Mai 2014, war das Wetter sonnig. Berechnen Sie ausgehend vom obigen Modell die Verteilung des Wetters am Mittwoch, 27. August 2014, also die Wahrscheinlichkeiten, dass das Wetter an diesem Tag sonnig, bewölkt oder regnerisch sein wird.

Hinweis: Zwischen dem 14. Mai und dem 27. August vergehen 105 Tage. Zur Berechnung von P^{105} empfiehlt es sich, die Matrix zu diagonalisieren.

Aufgabe 29. (Markov-Kette) (4 Punkte)

Es seien die Zufallsvariablen Y_n, $n \in \mathbb{N}$, als Ergebnisse eines Bernoulli-Experiments mit Erfolgswahrscheinlichkeit p gegeben. Das heißt, die Y_n sind unabhängig voneinander und nehmen die Werte 1 mit Wahrscheinlichkeit p und 0 mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ an, $0 \leq p \leq 1$. Man betrachte die Zufallsvariablen

$$X_n = 2Y_n + Y_{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass $(X_1, X_2, \dots)$ eine Markov-Kette definiert, und bestimmen Sie die Übergangsmatrix.

Aufgabe 30. (Ehrenfest-Modell) (6 Punkte)

Im *Ehrenfest-Modell* betrachtet man N (nummerierte) Kugeln, welche auf zwei Urnen aufgeteilt sind. Zu jedem Zeitpunkt wird eine Kugel zufällig gewählt und der Urne, in der sich diese Kugel gerade befindet, entnommen und in die andere Urne gelegt. Es sei X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n.

a) Stellen Sie die Übergangsmatrix $\boldsymbol{P}$ der Markov-Kette X_n auf. Geben Sie die Übergangsmatrix für $N = 4$ explizit an.

b) Klassifizieren Sie die Markov-Kette nach Reduzibilität und Periodizität.

c) Zeigen Sie, dass die Binomialverteilung mit Parametern $p = \frac{1}{2}$ und N die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ dieser Markov-Kette bildet.

Bemerkung: Das Ehrenfest-Modell wurde vom russisch-österreichischen Physikerehepaar Tatjana und Paul Ehrenfest als pädagogisches Beispielmodell zur Erläuterung eines Phänomens der Thermodynamik eingeführt. In diesem Zusammenhang stehen die beiden Urnen für zwei miteinander verbundene Gasbehälter, während die Kugeln einzelne Moleküle des Gases symbolisieren.

Aufgabe 31. (Warteschlange) (6 Punkte)

Eine *Warteschlange* besteht aus einer Person, die gerade bedient wird, und aus Personen, die auf die Bedienung warten. Wir betrachten eine Warteschlange zu jeder Sekunde und bezeichnen mit X_n die Anzahl der darin befindlichen Personen nach n Sekunden. Es gilt:

- In der Warteschlange können sich zu jedem Zeitpunkt höchstens N Personen befinden (d.h. wenn eine Person eintrifft und sieht, dass bereits N Personen warten bzw. bedient werden, dann verlässt sie die Schlange sofort wieder, ohne sich anzustellen).
- Innerhalb einer Sekunde wird die gerade bediente Person mit Wahrscheinlichkeit r fertig und verlässt die Warteschlange. Gleichzeitig kommt mit Wahrscheinlichkeit p eine neue Person hinzu. (Alle diese Ereignisse treten unabhängig voneinander ein. Man beachte, dass es möglich ist, dass innerhalb einer Sekunde die bediente Person fertig wird und gleichzeitig eine neue Person kommt, so dass sich die Größe der Warteschlange nicht ändert.)
- Wenn die Warteschlange leer ist, dann sind nur Neuankömmlinge möglich, wobei wir davon ausgehen, dass nur ein Neuankömmling pro Sekunde kommen und keiner noch innerhalb dieser Sekunde bedient werden kann.
- Wenn die Warteschlange voll ist, kann nur die gerade bediente Person die Warteschlange verlassen, aber kein Neuankömmling hinzukommen. (Insbesondere lassen wir nicht zu, dass die gerade bediente Person fertig wird und gleichzeitig eine neue Person hinzukommt.)

a) Modellieren Sie diese Situation als Markov-Kette und stellen Sie die Übergangsmatrix auf.

b) Betrachten Sie die totale Bedienzeit S eines Kunden, also die (zufällige) Zeit, während der ein Kunde bedient wird, sowie die (zufällige) Zeit T zwischen dem Eintreffen zweier Kunden. Bestimmen Sie die Verteilungen von S und T sowie ihre Erwartungswerte.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte