Algorithmische Mathematik II

Sommersemester 2014
Prof. Dr. Jochen Garcke
Dr. Jutta Adelsberger

universitätbonn

Übungsblatt 8.

Abgabe am **Montag, 2.6.2014**

Aufgabe 32. (Ehrenfest-Modell) (6 Punkte)

Wir betrachten erneut das Ehrenfest-Modell aus Aufgabe 30.

a) Zeigen Sie, dass die stationäre Verteilung nicht die Grenzverteilung der Markov-Kette ist, d.h. zeigen Sie, dass es Anfangsverteilungen $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ mit $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}^{(0)}\boldsymbol{P}^n \neq \boldsymbol{\pi}$ gibt.

b) Wir modifizieren das Modell folgendermaßen: Zu jedem Zeitpunkt n wird eine Münze geworfen, die mit Wahrscheinlichkeit $0 < p < 1$ Kopf und sonst Zahl liefert. Im Falle von „Zahl" wird, wie beim ursprünglichen Ehrenfest-Modell, eine Kugel zufällig gewählt und von der Urne, in der sich die gezogene Kugel gerade befindet, in die andere Urne gelegt. Im anderen Fall wird nichts verändert. Sei erneut X_n die Anzahl der Kugeln in der ersten Urne zum Zeitpunkt n. Konstruieren Sie die Übergangsmatrix dieser Markov-Kette.

c) Finden Sie die stationäre Verteilung $\boldsymbol{\pi}$ der in b) konstruierten Markov-Kette. Ist diese Verteilung nun Grenzverteilung im Sinne, dass $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{\mu}^{(0)}\boldsymbol{P}^n = \boldsymbol{\pi}$ für alle Anfangsverteilungen $\boldsymbol{\mu}^{(0)}$ gilt?

Aufgabe 33. (Lagrange-Interpolation) (3 Punkte)

a) Zeigen Sie für die Lagrange-Polynome $L_i(x) = \prod_{\substack{k=0\\k\neq i}} \frac{x-x_k}{x_i-x_k}$ die Identität

$$L_i(x) = \frac{\omega(x)}{(x-x_i)\omega'(x_i)} \quad \text{mit } \omega(x) = \prod_{i=0}^{n}(x-x_i).$$

b) Leiten Sie nun das Lagrange-Polynom $L_i(x)$ als Lösung der Interpolationsaufgabe $P(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i L_i(x)$ durch Bestimmung der Koeffizienten a_i in der Partialbruchzerlegung

$$\frac{P(x)}{\omega(x)} = \sum_{i=0}^{n} \frac{a_i}{x-x_i}$$

her.

Aufgabe 34. (Vandermonde-Matrizen) (3 Punkte)

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -5 \\ 15 \end{bmatrix}.$$

a) Formulieren Sie ein äquivalentes Polynom-Interpolationsproblem und bestimmen Sie dessen Lösung.

b) Lösen Sie das lineare Gleichungssystem, ohne dabei die Matrix zu invertieren.

Aufgabe 35. (Polynominterpolation) (4 Punkte)

a) Aus der folgenden Messtafel ist leider ein Wert verloren gegangen.

x_i	0	1	2	3	4
f_i	1	1	2	?	5

Werten Sie das durch die übrigen Daten definierte Interpolationspolynom an der fehlenden Stelle $x = 3$ aus *ohne* das Polynom explizit aufzustellen. Verwenden Sie dazu den Neville-Algorithmus.

b) Stellen Sie jetzt das Interpolationspolynom mit Hilfe des Newton-Algorithmus auf, verwenden Sie dabei dividierte Differenzen zur Berechnung der Polynomkoeffizienten. Werten Sie es anschließend an der Stelle $x = 3$ mit dem Horner-Schema aus.

c) Im Nachhinein stellt sich heraus, dass der fehlende Wert 3 ist. Ergänzen Sie Ihr Differenzenschema um den neuen Punkt (ohne es neu aufzustellen) und werten Sie das durch alle Punkte gehende Interpolationspolynom an der Stelle $x = 5$ aus.

Programmieraufgabe 3. (Interpolation) (12 Punkte)

Schreiben Sie in C folgende Funktionen:

a) Den Neville-Algorithmus zur Auswertung eines Interpolationspolynoms an einer beliebigen Stelle x für gegebene (x_i, f_i), $0 \leq i \leq n$.

b) Das dividierte Differenzenverfahren zur Bestimmung der Polynomkoeffizienten in Newton-Darstellung für gegebene (x_i, f_i), $0 \leq i \leq n$.

c) Das Horner-Schema zur Auswertung des Interpolationspolynoms in Newton-Darstellung an einer beliebigen Stelle x.

Betrachten Sie als Beispiel die Gaußsche Hutfunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

im Intervall $[-3, 3]$ mit $n = 2, 3, 5, 9, 17$ und 33 Stützstellen.

d) Werten Sie zur Überprüfung Ihrer Funktionen das Interpolationspolynom für $f(x)$ an den Stellen $x_1 = 0.02$, $x_2 = 0.2$ und $x_3 = 2$ sowohl mit dem Neville-Algorithmus als auch mit dividierten Differenzen und dem Horner-Schema aus.

e) Plotten Sie $|f(x_k) - P(x_k)|$ gegen n (Aufwand zu Genauigkeit) in einen gemeinsamen Graphen, wobei Sie Punkte für gleiches x_k miteinander verbinden. Verwenden Sie für beide Achsen eine logarithmische Skala. Bestimmen Sie jeweils die Konvergenzrate.

f) Vergleichen Sie den Rechenaufwand für a) und b)+c) für den Fall, dass die Zahl der Stützstellen anwächst, und für den Fall, dass die Zahl der Auswertungen anwächst.

Abgabe **Mo 16.6.** bis **Fr 20.6.** im **CIP-Pool** (`www.iam.uni-bonn.de/pcpool/`).
Ab Mo 2.6. hängen Terminlisten aus, in die Sie sich bitte in Zweiergruppen eintragen. Für Vormittagstermine befindet sich die Liste im CIP-Pool der Endenicher Allee, für Nachmittagstermine im CIP-Pool der Wegelerstraße (dort finden dann auch jeweils die Abgaben statt).

Gesamtpunktzahl: 16 Punkte Theorie + 12 Punkte Praxis