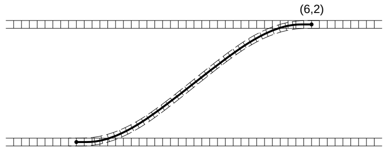
Übungsblatt 9.

Abgabe am **Montag, 16.6.2014**

Aufgabe 36. (Hermite-Interpolation) (5 Punkte)

a) Eine Verbindungsstrecke zwischen zwei parallelen Gleisen soll so eingerichtet werden, dass die Richtungsänderung an den beiden Weichen minimal (d.h. die Ableitung der Interpolierenden gleich Null) wird.



Bestimmen Sie den Verlauf der Verbindungsstrecke mittels Hermite-Interpolation.

b) Lösen Sie obiges Problem für den Fall, dass auch die Krümmung an den beiden Punkten verschwinden soll.

c) Ein Bahn-Ingenieur hat für das Problem eine ganz andere Lösung:

$$S(x) = \sin\left(\frac{\pi}{4}x - \pi\right) + 1.$$

Schätzen Sie die Differenz zwischen den beiden Lösungen sowohl für a) als auch für b) ab. Zeichnen oder plotten Sie $S(x) - P(x)$ und vergleichen Sie damit Ihr Ergebnis.

Aufgabe 37. (Kondition der Polynominterpolation) (5 Punkte)

a) Bestimmen Sie die Konditionszahlen $\frac{\partial y}{\partial x}$, $\frac{\partial y}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial y}{\partial f_i}$ für die Polynominterpolation. Um welchen Betrag ändert sich $y = P(x)$, wenn f_i sich um ε ändert? Verwenden Sie die Darstellung mittels Lagrange-Polynomen.

b) Betrachten Sie den Fehler der Hermite-Polynominterpolation einer Funktion f mit $|f^{(n+1)}(x)| \leq c$ auf dem Intervall $[-1, 1]$ für $n + 1$ äquidistante Stützstellen $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$. Vergleichen Sie den Fehler $|f(x) - P(x)|$ in den Intervallen $[0, \frac{2}{n}]$ und $[1 - \frac{2}{n}, 1]$ für wachsendes n.

Bemerkung: Diese Diskussion liefert einen Hinweis, dass der Interpolationsfehler am Rand des Intervalls wesentlich größer werden kann als im Inneren. Durch eine kluge Wahl der Stützstellen x_i kann jedoch der Interpolationsfehler über das gesamte Intervall minimiert werden. Diese Eigenschaft haben gerade die Nullstellen der Tschebyscheff-Polynome, wie im Folgenden gezeigt wird.

Aufgabe 38. (Tschebyscheff-Interpolation) (10 Punkte)

a) Die normierten Tschebyscheff-Polynome T_n sind definiert als

$$T_0(x) := 1$$
$$T_n(x) := 2^{1-n}\cos(n \cdot \arccos x) \quad \text{für } n \geq 1.$$

Bestimmen Sie $T_1(x)$ bis $T_3(x)$ direkt aus dieser Definition.

b) Zeigen Sie, dass die normierten Tschebyscheff-Polynome für $n > 2$ der Rekursionsformel

$$T_{n+1}(x) = xT_n(x) - \frac{1}{4}T_{n-1}(x)$$

genügen und berechnen Sie daraus $T_4(x)$ und $T_5(x)$.

c) Zeigen Sie, dass die Nullstellen x_k, $1 \leq k \leq n$, des Tschebyscheff-Polynoms T_n für $n \geq 1$ als

$$x_k = \cos\left(\pi \frac{2k-1}{2n}\right)$$

gegeben sind.

d) Beweisen Sie die Minimaleigenschaft der normierten Tschebyscheff-Polynome

$$\frac{1}{2^{n-1}} = \max_{x\in[-1,1]} |T_n(x)| \leq \max_{x\in[-1,1]} |Q_n(x)|$$

für alle normierten (d.h. mit führendem Koeffizienten 1) Polynome Q_n vom Grad n.

e) Beweisen Sie die Bestapproximationseigenschaft der Tschebyscheff-Polynome: $P(x)$ sei das Interpolationspolynom für die Stützstellen x_k, welche die Nullstellen von T_{n+1} sind. Dann gilt für jedes $f \in C^{n+1}$

$$\max_{x\in[-1,1]} |f(x) - P(x)| \leq \frac{1}{2^n(n+1)!} \max_{x\in[-1,1]} |f^{(n+1)}(x)|.$$

f) Die Funktion $f(x) = e^x$ werde auf $[-1,1]$ durch ein Polynom $P(x)$ interpoliert. Dabei wähle man als Stützstellen von $P(x)$ einmal die Nullstellen von $T_4(x)$ und einmal vier äquidistante Punkte. Schätzen Sie jeweils den Interpolationsfehler ab.

Gesamtpunktzahl: 20 Punkte