Trigonometrische Interpolation

Beweisen Sie, dass zu den Stützpunkten (x_k, f_k), $0 \leq k \leq n-1$, mit $x_k = 2\pi k/n$ für beliebige komplexe f_k genau ein trigonometrisches Polynom

$$P(x) = \alpha_0 + \alpha_1 e^{ix} + \ldots + \alpha_{n-1} e^{(n-1)ix} \quad \text{mit } \alpha_k \in \mathbb{C}$$

existiert, für das $P(x_k) = f_k \; \forall k$ gilt.

Lösung

- Bijektive Umformung $x \to \omega$ mit $\omega := e^{ix}$, $\omega_k := e^{ix_k}$ und $x_k := \frac{2\pi k}{n}$. Obige Aufgabenstellung ist somit äquivalent dazu, dass genau ein Polynom

$$P(\omega) = \alpha_0 + \alpha_1 \omega + \ldots + \alpha_{n-1} \omega^{n-1}$$

  mit $P(\omega_k) = f_k$ existiert.

- Bestimmung der Koeffizienten α_i ergibt das LGS

$$\alpha_0 + \alpha_1 \omega_k + \ldots + \alpha_{n-1} \omega_k^{n-1} = f_k \qquad \forall k$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & \omega_0 & \omega_0^2 & \cdots & \omega_0^{n-1} \\ 1 & \omega_1 & \omega_1^2 & \cdots & \omega_1^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \omega_{n-1} & \omega_{n-1}^2 & \cdots & \omega_{n-1}^{n-1} \end{pmatrix}}_{\text{Vandermonde-Matrix}} \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{n-1} \end{pmatrix}.$$

- Vandermonde-Determinante $\neq 0$, denn $\det(\omega_j^k)_{j,k=0,\ldots,n-1} = \prod_{0 \leq j \leq l \leq n-1} (\omega_l - \omega_j) \neq 0$ wegen $\omega_j \neq \omega_l$ für $j \neq l$. $\Rightarrow$ Eindeutige Lösung.