Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

1. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **22.04.**

Aufgabe 1. (Konvexität und Definitheit)

a) Wie in Beispiel 5.6 der Vorlesung sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \frac{1}{2}x^T Ax + b^T x + c.$$

Zeige, dass f genau dann konvex ist, wenn A positiv-semidefinit ist.

b) Es sei $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar. Zeige, dass g genau dann konvex ist, wenn die Hesse-Matrix $(Hg)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$ positiv-semidefinit ist.

Hinweis: Wenn b) gezeigt wird, folgt a) direkt. Der Aufgabenteil a) kann aber auch direkt gezeigt werden.

Aufgabe 2. (Newton-Verfahren bei Polynomen)

Es sei p ein reelles Polynom mindestens zweiten Grades, das nur reelle Nullstellen besitzt. Zeige, dass das Newton-Verfahren für jeden Startwert, der größer ist als die größte Nullstelle, eine gegen diese Nullstelle konvergente, streng monoton fallende Folge liefert.

Aufgabe 3. (Heron-Verfahren)

Zur Berechnung der Quadratwurzel einer beliebigen positiven Zahl c kann die Gleichung

$$x^2 - c = 0, \qquad c \in (0, \infty).$$

gelöst werden.
Die Zahl c sei in Gleitkommaarithmetik in der Form

$$c = m \cdot 2^e, \qquad m \in (0.5, 1],$$

gegeben, wobei m die Mantisse und $e \in \mathbb{N}$ den Exponenten bezeichne.

a) Gib ausgehend von der obigen Darstellung ein Verfahren der Form $x_{k+1} = \Phi(x_k)$ zur Berechnung von $\sqrt{c}$ an. Dieses Verfahren soll aus einem Vorverarbeitungsschritt für die Mantisse und einer anschließenden Newton-Iteration bestehen.

b) Führe mit einem geeigneten Hilfsmittel (Taschenrechner, Octave, Wolfram Alpha o.ä.) vier Iterationsschritte zur Berechnung von $\sqrt{3}$ mit $x_0 = 1$ bzw. $x_0 = 0.5$ durch.

c) Zeige nun direkt, dass das konstruierte Verfahren quadratisch gegen die Zahl $\sqrt{c}$ konvergiert. Wie ist dafür der Startwert zu wählen? Was passiert, wenn der Startwert x_0 negativ gewählt wird?

Abgabe der Programmieraufgabe am 28. oder 29. April im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Gedämpftes Newton-Verfahren)

Schreibe ein Programm zur Berechnung der Nullstelle von $g(t) = \arctan(t)$ mittels des ungedämpften und des gedämpften Newton-Verfahrens. Teste mit $x_0 = 0.5, 1.5$ sowie $\tau = 0.5, 0.9$. Vergleiche das Konvergenzverhalten.

Die Kriterien für die Zulassung zur mündlichen Prüfung lauten wie folgt:

- Für jede Aufgabe werden vier Punkte veranschlagt. Pro Blatt gibt es entweder vier Theorieaufgaben oder eine Programmieraufgabe und drei Theorieaufgaben. Programmieraufgaben gibt es voraussichtlich auf jedem zweiten Übungsblatt.
- Programmieraufgaben und sonstige Aufgaben werden getrennt gewertet. Übers ganze Semester müssen jeweils 50% der zu erreichenden Punkte gesammelt werden.
- Die Abgabe der Programme erfolgt im CIP-Pool (`http://cip.iam.uni-bonn.de`). Der gewünschte Abgabetermin soll in der Woche vor der Abgabe in die im CIP-Pool ausgehängten Listen eingetragen werden. Die CIP-Pool-Betreuer stehen für Fragen rund um die Programmieraufgaben zur Verfügung.
- Die Abgabe der Theorieaufgaben in Zweiergruppen und die Abgabe der Programmieraufgaben in Dreiergruppen ist erwünscht. Es wird jedoch jeder und jedem Einzelnen dringend geraten, sich mit allen Aufgaben auseinanderzusetzen, da die Prüfung natürlich allein abgelegt werden muss.