Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

2. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **29.04.**

Aufgabe 1. (Schulz-Iteration zur Bestimmung der Matrixinversen)

Die Inverse der regulären Matrix $A \in \mathbb{K}^{n \times n}$ ist die eindeutige Lösung der Gleichung

$$F(X) := X^{-1} - A = 0.$$

Die Anwendung des Newton-Verfahrens auf F führt auf die Iteration

$$X_{k+1} = X_k + X_k(I - AX_k) = X_k(2I - AX_k).$$

Im folgenden wird gezeigt: Für jede Startmatrix $X_0 \in \mathbb{K}^{n \times n}$ mit $\|I - AX_0\| \leq q < 1$ konvergiert das sich ergebende Verfahren quadratisch gegen A^{-1}, wobei $\|\cdot\|$ eine beliebige submultiplikative Matrixnorm bezeichne.

a) Zeige zunächst: Es gilt

$$\left\|X_k - A^{-1}\right\| \leq \frac{\|X_0\|}{1-q} \|I - AX_k\| .$$

b) Folgere nun aus der Ungleichung

$$\|I - AX_k\| \leq q^{2^k}$$

die quadratische Konvergenz des Verfahrens!

Aufgabe 2. (Modifiziertes Newton-Verfahren)

Wie in Beispiel 2.12 aus der Vorlesung wird $f(t) = \arctan t$ mit der einzigen Nullstelle $t^* = 0$ betrachtet.

a) Zeige, dass das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von f für jeden Startwert $t_0 \neq 0$ eine Folge $\{t_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ mit alternierendem Vorzeichen erzeugt!

b) Es sei die Funktion $g\colon t \mapsto \tan \frac{2t}{1+t^2}$ auf $(0, \infty)$ gegeben. Zeige, dass das Newton-Verfahren für f genau für die $t_0 \in \mathbb{R}$ konvergiert, für die $|t_0| < g(|t_0|)$ gilt!

   Hinweis: Ohne Beweis kann verwendet werden, dass g folgende Eigenschaften hat: Es existiert genau ein $s \in (0, \infty)$ mit $s = g(s)$ und es gilt $t \in (0, s)$ genau dann, wenn $t < g(t)$. Erstelle mit einem geeigneten Hilfsmittel (WolframAlpha, Octave, Gnuplot) einen Plot von g, um dir diesen Zusammenhang zu vergegenwärtigen!

c) Zeige, dass es kein $0 < \lambda \leq 1$ gibt, sodass das Verfahren

$$t_{k+1} = t_k - \lambda \frac{f(t_k)}{f'(t_k)}$$

global konvergent ist!

Hinweis: Zeige, dass es für jedes $\lambda \in (0, 1]$ ein $R(\lambda) > 0$ gibt, sodass für alle t_k mit $|t_k| > R(\lambda)$ folgt, dass $|t_{k+1}| > |t_k|$ ist!

Aufgabe 3. (Abstiegsverfahren und Armijo-Goldstein-Bedingung)

Gegeben sei die quadratische Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{2} x^T A x - b^T x,$$

wobei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrisch und positiv definit sei. Das hier beschriebene Verfahren bestimmt das Minimum von f und damit die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ iterativ durch die Vorschrift $x_{k+1} = x_k + t_k p_k$, $k \geq 0$, wobei $p_k := -\nabla f(x_k)$ die Suchrichtung und t_k die durch die Minimierungsregel gelieferte Schrittweite angibt.

a) Zeige, dass $p_k = b - Ax_k$ gilt!

b) Zeige für den Fall, dass alle eindimensionalen Minimierungsprobleme exakt gelöst werden, d.h., wenn $t_k = \frac{p_k^T p_k}{p_k^T A p_k}$ gewählt wird, die Gleichung

$$f(x_{k+1}) - f(x_k) = \frac{1}{2} t_k p_k^T \nabla f(x_k).$$

c) Zeige, dass die Armijo-Goldstein-Bedingung mit $0 < \mu \leq \frac{1}{2}$ erfüllt ist!

Aufgabe 4. (Quasi-Newton-Verfahren)

In der Vorlesung wurde das sog. Broyden-Update durch die Gleichung

$$B_{k+1} := B_k + \frac{(y_k - B_k s_k) s_k^H}{s_k^H s_k}$$

mit $s_k := x_{k+1} - x_k$ und $y_k := f(x_{k+1}) - f(x_k)$ definiert. Es sei außerdem $\{s_k, z_2, \ldots, z_n\}$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{K}^n$.

a) Zeige: Es gelten die Gleichungen

$$(B_{k+1} - B_k) s_k = y_k - B_k s_k \quad \text{und} \quad (B_{k+1} - B_k) z_i = 0, \quad i = 2, \ldots, n.$$

b) Zeige: Die so gewählte Matrix B_{k+1} erfüllt die Bedingung

$$\|B_{k+1} - B_k\| = \min_{A \in \mathbb{K}^{n \times n}} \big\{ \|A - B_k\| \,:\, A s_k = y_k \big\},$$

wobei die Matrixnorm definiert sei durch $\|M\| := \sup_{x \in \mathbb{K}^n} \frac{\|Mx\|}{\|x\|}$.
