Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

3. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 06.05.**

Aufgabe 1. (Lineare Minimierung unter Nebenbedingungen)

Es seien $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ mit $\operatorname{rank} A = n \leq m$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$, $\operatorname{rank} C = p < n$, sowie ein Vektor $d \in \mathbb{R}^p$ gegeben. Gesucht ist die Lösung $x_{\min}$ des linearen Ausgleichsproblems $\frac{1}{2}\|b - Ax\|_2^2 \to \min$ unter allen x, für die auch die (lineare) Nebenbedingung $Cx = d$ erfüllt ist.

Zeige, dass die Lösung des Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} I & 0 & A \\ 0 & 0 & C \\ A^H & C^H & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ \lambda \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b \\ d \\ 0 \end{pmatrix}$$

gerade der Lösung der oben beschriebenen Minimierungsaufgabe entspricht!

Aufgabe 2. (Wolfe-Bedingungen)

Es sei $0 < \mu < \mu' < 1$. Betrachtet wird die Methode des steilsten Abstiegs, also $p_k = -\nabla f(x_k)$. Die Schrittweite t_k wird per Liniensuche bestimmt.

a) Zeige, dass die zweite Wolfe-Bedingung erfüllt ist.

b) Gib eine Funktionenschar f_m an, für die die erste Wolfe-Bedingung nicht unabhängig von m erfüllt ist.

Aufgabe 3. (Gauß-Newton-Verfahren)

Gegeben sei die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} x+1 \\ \lambda x^2 + x - 1 \end{pmatrix},$$

wobei λ ein reeller Parameter ist, sowie das zugehörige Minimierungsproblem

$$g(x) := \frac{1}{2}\|f(x)\|_2^2 \to \min.$$

a) Zeige: Für $\lambda < 1$ besitzt g ein lokales Minimum bei $x = 0$; dieses Minimum ist eindeutig, wenn $\lambda < 7/16$ ist.

b) Formuliere das Gauß-Newton-Verfahren zur Minimierung von g als Fixpunktverfahren der Form $x_{k+1} = \Phi(x_k)$!

Hinweis: Es kann zunächst gezeigt werden: Die Pseudoinverse eines Vektors $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq 0$, ist gerade $v^H/(v^H v)$. (Prüfe die definierenden Bedingungen!)

c) Weise nach, dass $x = 0$ für $\lambda < -1$ ein abstoßender Fixpunkt ist, d.h., dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass

$$|x_{k+1}| > |x_k| \qquad \text{für alle } x_k \text{ mit } 0 < |x_k| < \delta!$$

d) Zeige: Für $|\lambda| < 1$ ist das Gauß-Newton-Verfahren konvergent. Welche Konvergenzordnung liegt in diesem Falle vor?

Abgabe der Programmieraufgabe am 12. oder 13. Mai im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Nichtlineare Minimierung)

Implementiere die folgenden in der Vorlesung vorgestellten Verfahren zur nichtlinearen Ausgleichsrechnung:

a) BFGS-Verfahren

b) Gauss-Newton-Verfahren mit Schrittweitensteuerung nach Armijo-Goldstein

Teste die Algorithmen anhand folgender Problemstellung:
Tee in einer Kanne hat nach dem Aufgießen eine Temperatur von 96 °C. Er wird auf ein Stövchen gestellt. Die Heizleistung des Teelichts genügt aber nicht dazu, die Temperatur konstant zu halten. Der Tee kann erst getrunken werden, wenn er weniger als 60 °C hat. Um den richtigen Zeitpunkt vorherzusagen, wann diese Temperatur erreicht ist, wird eine Messreihe durchgeführt. Man platziert dazu ein Thermometer in der Mitte der Kanne und bestimmt (mithilfe einer Uhr) jeweils die Zeit, zu der die Temperaturen 95 °C, 90 °C, . . . , 65 °C unterschritten wurden. Es ergibt sich die folgende Tabelle:

T (in °C)	95	90	85	80	75	70	65
t (in s)	30	125	225	367	535	740	990

Frühere Erfahrungen besagen, dass beim Abkühlungsprozess zwischen Zeit und Temperatur ein exponentieller Zusammenhang besteht, d.h., dass

$$T(t) = a + b\mathrm{e}^{-ct}.$$

Bestimme die Modellparameter a, b und c aus den gegebenen Daten, indem du ein geeignetes Ausgleichsproblem löst!
Ab wann kann der Tee getrunken werden? Welche Minimaltemperatur wird erreicht?

Lösung zum Vergleich: Es ergibt sich $a = 53.6581$, $b = 42.8294$ und $c = 0.0013$. Die Trinktemperatur wird nach etwa 24 Minuten erreicht und für $t \to \infty$ nähert sich die Temperatur dem Wert 53 °C an.
(alle Angaben ohne Gewähr)
