# Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

## 4. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **13.05.**

---

**Aufgabe 1.** (Symmetrie DFP- und BFGS-Verfahren)

Es wird die Notation aus Abschnitt 5.2.2 der Vorlesung verwendet. Zeige, dass für $B_k^{\text{BFGS}} := (H_k^{\text{BFGS}})^{-1}$ gilt

$$B_{k+1}^{\text{BFGS}} = B_k^{\text{BFGS}} - \frac{B_k^{\text{BFGS}} s_k s_k^T B_k^{\text{BFGS}}}{s_k^T B_k^{\text{BFGS}} s_k} + \gamma_k y_k y_k^T.$$

---

**Aufgabe 2.** (Symmetrisches Rang-1-Verfahren)

Sowohl beim DFP- als auch beim BFGS-Verfahren wird mit Rang-2-Updates gearbeitet. In dieser Aufgabe wird ein Rang-1-Ansatz untersucht. Für eine symmetrische Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $u \in \mathbb{R}^n$ und $\gamma \in \mathbb{R}$ sei

$$B := A + \gamma u u^T.$$

Sei darüber hinaus die Quasi-Newton-Gleichung $By = s$ für $y, s \in \mathbb{R}^n$ erfüllt. Zeige, dass dieser Ansatz auf die symmetrische Rang-1-Update-Formel

$$H_{k+1}^{\text{SR1}} = H_k^{\text{SR1}} + \frac{(s_k - H_k^{\text{SR1}} y_k)(s_k - H_k^{\text{SR1}} y_k)^T}{(s_k - H_k^{\text{SR1}} y_k)^T y_k}$$

führt, sofern $(s_k - H_k^{\text{SR1}} y_k)^T y_k \neq 0$ gilt.

---

**Aufgabe 3.** (Gauß-Newton–Verfahren)

In der Ebene sind Messpunkte $(x_i, y_i)$ für $i = 1, \dots, n$ gegeben. Es soll ein Kreis gezeichnet werden, so dass alle Punkte möglichst nahe an der Kreislinie liegen.

a) Formuliere die Aufgabe als nichtlineares Ausgleichsproblem.

b) Gib die Linearisierung für das Gauß–Newton–Verfahren an.

---

**Aufgabe 4.** (Hebden-Verfahren)

In dieser Aufgabe wird das in der Vorlesung im Kontext des Levenberg-Marquardt-Verfahrens erwähnte Hebden-Verfahren untersucht.

a) Es sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f\colon I \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, streng monoton wachsend und konkav mit (eindeutiger) Nullstelle $x^* \in I$. Zeige, dass das Newton-Raphson-Verfahren für alle Startwerte $x_0 \leq x^*$ aus $I$ monoton gegen $x^*$ konvergiert.

b) Es sei mit $z_i > 0$ für $i = 1, \dots, n$, $d_1 > d_2 > \cdots > d_n > 0$ und $\rho > 0$

$$r(x) := \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i^2}{(d_i + x)^2},$$

wobei $r(0) > \rho$ gelten soll. Um die Gleichung

$$r(x) = \rho$$

zu lösen, wird nun das Newton-Raphson-Verfahren auf die Funktion

$$g(x) := \frac{1}{\sqrt{r(x)}} - \frac{1}{\sqrt{\rho}}$$

angewendet. Zeige, dass das sich dadurch ergebende Verfahren für den Startwert $x_0 := 0$ konvergiert.