Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

5. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **20.05.**

Aufgabe 1. (Eindimensionale Optimierung mit linearer Nebenbedingung)

Eine stetig differenzierbare Funktion $f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ soll auf der Menge

$$M := \{x \in \mathbb{R} \,:\, ax \geq b\}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, \qquad a \neq 0,$$

minimiert werden.

Zeige: Ist x_* lokales Minimum von f in M, so existiert ein reelle Zahl $s_* \geq 0$, sodass $f'(x_*) = as_*$ und $s_*(ax_* - b) = 0$.

Warum gilt die Aussage nur in dieser Richtung? (Gegenbeispiel)

Aufgabe 2. (Mehrdimensionale Optimierung mit linearen Nebenbedingungen)

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } f(x) = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq 2,\, x_1 + x_2 \leq 3\}.$$

Gib alle Punkte an, für die die Optimalitätsbedingung erster Ordnung erfüllt ist.

Aufgabe 3. (Nichtlineare Nebenbedingung)

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } f(x) = -x_1^2 - 4x_2^2 - 16x_3^2 \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1x_2x_3 = -1\}.$$

Bestimme alle Punkte, für die die notwendige Optimalitätsbedingung erster Ordnung erfüllt ist und prüfe anschließend mit Optimalitätsbedingungen zweiter Ordnung, ob dies lokale Lösungen sind.

Aufgabe 4. (Aktive und passive Nebenbedingungen)

Gegeben sei die Optimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } f(x) = -5x_2 + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^3 : g_1(x) = 0, g_i(x) \geq 0, i = 2, 3, 4\},$$

wobei

$$g_1(x) := x_1 - 2x_2 + x_3 - 1, \qquad g_2(x) := -4x_1 - 3x_2 + 8,$$
$$g_3(x) := 2x_1 + x_2 - 2, \qquad g_4(x) := -2x_2 + x_3.$$

Zeige, dass $x_* := (1, 1, 2)^T$ diese Optimierungsaufgabe löst.