Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

6. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **27.05.**

Aufgabe 1. (Konvexität)

a) Mit $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$, $m, n \in \mathbb{N}$, linear unabhängig sei

$$K := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i v_i, \alpha_i \geq 0\}$$

ein Kegel. Zeige, dass K konvex und abgeschlossen ist.

b) Zeige, dass sowohl

$$M_1 := \left\{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 > 0, x_2 \geq \frac{1}{x_1}\right\} \text{ als auch } M_2 := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 \geq 0\}$$

konvex und abgeschlossen sind. Zeige, dass

$$M_1 + M_2 := \{x + y \,:\, x \in M_1, y \in M_2\}$$

aber konvex und offen ist.

Aufgabe 2. (Optimierungsaufgaben)

a) Bestimme den Abstand der Menge $M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, x_1 + x_2 \geq 4, 2x_1 + x_2 \geq 5\}$ zum Koordinatenursprung.

b) Stelle die KKT-Bedingung für das Problem

$$\text{maximiere } c^T x \text{ in } M := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, Ax \leq b\}$$

mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $c \in \mathbb{R}^n$ auf.

Aufgabe 3. (Projektion bei Box-Restriktionen)

Betrachtet wird das Optimierungsproblem für $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$

$$\text{minimiere } f(x) \text{ in } M := [l_1, r_1] \times \cdots \times [l_n, r_n]$$

mit $l_i \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, $r_i \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $l_i < r_i$, $i = 1, \dots, n$. Bei der Lösung mittels des projizierten Gradientenverfahrens ist es nötig, restringierte Minimierungsprobleme zu lösen, da $P(x)$ bestimmt werden muss.

a) Formuliere das zugehörige Minimierungsproblem.

b) Die Projektion lässt sich im hier behandelten Spezialfall komponentenweise berechnen als

$$P_i(x) = \begin{cases} l_i, & x_i < l_i \\ x_i, & x_i \in [l_i, r_i] \\ r_i, & x_i > r_i \end{cases} .$$

Zeige, dass hierdurch tatsächlich die Projektion berechnet wird.

Abgabe der Programmieraufgabe am 02. oder 03. Juni im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Projiziertes Gradientenverfahren)

Programmiere das projizierte Gradientenverfahren und test anhand der Minimierungsaufgabe

$$\text{minimiere } -x_1x_2 - x_2x_3 - x_1x_3 \text{ in } M := \{x \in \mathbb{R}^3 \,:\, x_1 + x_2 + x_3 = 3\}.$$

Beachte, dass die Projektion auf M korrekt berechnet wird und das der Startpunkt zulässig ist. Wähle $\mu = 0,5$ und $\varepsilon = 10^{-4}$.
