Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

7. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **03.06.**

Aufgabe 1. (Affine Nebenbedingungen 1)

Betrachtet wird das Minimierungsproblem

$$\text{minimiere } \|x\|_2 \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, C^T x = d\}$$

mit $d \in \mathbb{R}^m$, $C = [c_1, \ldots, c_m] \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Dabei habe C vollen Spaltenrang. Sei

$$G := \begin{bmatrix} c_1^T c_1 & \cdots & c_1^T c_m \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_m^T c_1 & \cdots & c_m^T c_m \end{bmatrix}$$

die sogenannte *Gramsche Matrix* und $a \in \mathbb{R}^m$ die Lösung von $Ga = d$.
Zeige: Ist x_* Lösung des Minimierungsproblems, so gilt $x_* = Ca$.

Aufgabe 2. (Affine Nebenbedingungen 2)

Betrachtet wird für $t \in \mathbb{R}$ das Minimierungproblem

$$\begin{aligned} \text{minimiere } (x_1 - \frac{3}{2})^2 + (x_2 - t)^4 \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, & 1 - x_1 - x_2 \geq 0, \\ & 1 - x_1 + x_2 \geq 0, \\ & 1 + x_1 - x_2 \geq 0, \\ & 1 + x_1 + x_2 \geq 0\}. \end{aligned}$$

a) Bestimme t, so dass $x_* = (1, 0)^T$ die KKT-Bedingungen erfüllt.

b) Zeige, dass für $t = 1$ nur die erste Nebenbedingung an der Lösung aktiv ist und finde die Lösung.

Aufgabe 3. (Nichtlineare Nebenbedingungen)

Gesucht ist der Punkt auf der Kurve $x_2 = (x_1 - 1)^2/5$, der den kleinsten euklidischen Abstand zum Punkt $(1, 2)^T$ besitzt.

a) Wie lautet das entsprechende Minimierungsproblem?

b) Welche Punkte erfüllen die KKT-Bedingungen?

c) Welche dieser Punkte sind Lösungen?

d) Durch Substitution der Nebenbedingung in die zu minimierende Funktion und Eliminierung von x_1 erhält man ein unrestringiertes Minimierungsproblem. Zeige, dass die Lösungen dieses Problems keine Lösungen des ursprünglichen Problems sein können.

Aufgabe 4. (Bestimmung aktiver Nebenbedingungen)

Gegeben sei das Problem (6.13) aus der Vorlesung mit

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad g = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$a_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad a_5 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad a_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$b_1 = 0, \quad b_2 = 2, \quad b_3 = 5, \quad b_4 = 2, \quad b_5 = 5, \quad b_6 = 1$$

und $\mathcal{I}_U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

a) Skizziere den zulässigen Bereich.

b) Führe drei Schritte des in Abschnitt 6.5 beschriebenen Verfahrens durch für die Startwerte $x_0 = (0, 2)^T$ und $\mathcal{I}_0 = \{4\}$.
