Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

8. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 17.06.**

Aufgabe 1. (Straffunktion)

Gegeben sei das quadratische Minimierungsproblem

$$\text{minimiere } f(x) := \frac{1}{2}x^T Qx + c^T x + \gamma \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, h(x) := b^T x = 0\},$$

wobei $Q \in \mathbb{R}^{n\times n}$ symmetrisch und positiv definit, $b, c \in \mathbb{R}^n$, $b \neq 0$ und $\gamma \in \mathbb{R}$. Bestimme für festes $\rho > 0$ das Minimum $x(\rho)$ der zugehörigen Straffunktion

$$\varphi_\rho(x) := f(x) + \frac{\rho}{2}(h(x))^2$$

auf dem $\mathbb{R}^n$, berechne $x_* := \lim_{\rho\to\infty} x(\rho)$ und zeige, dass x_* die Lösung des ursprünglichen Problems ist.

Aufgabe 2. (Unzulässiges SQP-Teilproblem)

Gegeben sei das Minimierungsproblem

$$\begin{aligned}\text{minimiere } f(x) := -x_1 - x_2 \quad \text{in } M := \{x \in \mathbb{R}^2 \,:\, & g_1(x) := x_1 \geq 0,\\ & g_2(x) := x_2 \geq 0,\\ & g_3(x) := x_1^2 + x_2^2 - 1 = 0\}.\end{aligned}$$

a) Bestimme die Lösung des Problems.

b) Es sei $x^{(k)} := (-1/2, -1/2)^T$ und $\lambda^{(k)} := (1, 0, 1)^T$. Gib das zugehörige SQP-Teilproblem an und zeige, dass seine zulässige Menge leer ist.

Aufgabe 3. (Ein Problem der Kernphysik)

In dieser Aufgabe wird das nach Thomas und Fermi benannte Anfangswertproblem

$$\ddot{x}(t) = \frac{x(t)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{t}}, \qquad x(0) = x_0 > 0, \qquad \dot{x}(0) = v_0$$

betrachtet.

a) Transformiere durch Einführung einer zusätzlichen Variable v das Problem auf ein System erster Ordnung.

Warum ist der Satz von Picard–Lindelöf nicht anwendbar?

b) Zeige mithilfe des Lemmas von Gronwall direkt die Eindeutigkeit von Lösungen $x \in \mathcal{C}^2(0,T] \cap \mathcal{C}^1[0,T]$.

Hinweis: Verwende folgende Verallgemeinerung von Gronwalls Lemma:

Für $u, \beta \in C([t_0,T],\mathbb{R})$, $\alpha\colon (t_0,T) \to [0,\infty)$ mit $\int_{t_0}^T \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau < \infty$ gilt

$$u(t) \le \int_{t_0}^t \alpha(s)u(s)\,\mathrm{d}s + \beta(t) \quad \Longrightarrow \quad u(t) \le \int_{t_0}^t \alpha(s)\beta(s)\mathrm{e}^{\int_s^t \alpha(\tau)\,\mathrm{d}\tau}\,\mathrm{d}s + \beta(t)$$

(vgl. Wikipedia und den entsprechenden Beweis in Wikibooks).

c) Transformiere die Differentialgleichung nichtlinear auf ein System erster Ordnung, auf das der Satz von Picard–Lindelöf anwendbar ist.

Hinweis: Verwende die Transformationen $y(s) := x(s^2)$ und $z(s) := \frac{1}{s}\frac{\mathrm{d}y(s)}{\mathrm{d}s}$.

Abgabe der Programmieraufgabe am 23. oder 24. Juni im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (SQP)

Ziel der Aufgabe ist es, den in der Vorlesung vorgestellten SQP-Algorithmus zu implementieren.

a) Implementiere das in der Vorlesung vorgestellte Verfahren zur Bestimmung der aktiven Menge und teste an Hand von Beispiel 6.24.

b) Implementiere das SQP-Verfahren. Verwende a) und setze voraus, dass ein zulässiger Punkt $\tilde{x}$ bekannt ist.

Teste anhand von

$$\text{minimiere } f(x) := 3(x_1-2)^2 + 2(x_2-3)^2 \quad \text{in } M := \{g_1(x) := -x_1^2 + x_2 \ge 0, \; g_2(x) := -x_1^2 - x_2^2 + 1 \ge 0\}.$$

Wähle dabei $\tilde{x} = (0,1/2)^T$ und starte mit $x^{(0)} = (1/2,1)^T$, $\lambda = (0,0)^T$.
