Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

9. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **24.06.**

Aufgabe 1. (Konsistenz von Einschrittverfahren)

Zu beweisen ist die Aussage der Bemerkung nach Definition 7.8 aus der Vorlesung.
Es seien Φ und f hinreichend glatt. Zeige, dass das durch Φ gegebene Einschrittverfahren genau dann konsistent der Ordnung p ist, wenn

$$x(t_1) - x_0 - h\Phi\big(x(t_0), x(t_1); h\big) = \mathcal{O}\big(h^{p+1}\big).$$

Aufgabe 2. (Implizite Mittelpunktsregel)

Weise nach, dass das Einschrittverfahren

$$x_{k+1} = x_k + hf\left(\frac{t_k + t_{k+1}}{2}, \frac{x_k + x_{k+1}}{2}\right)$$

die Konsistenzordnung $p = 2$ besitzt.

Aufgabe 3. (Autonomie-Bedingung)

Zeige, dass die Bedingung

$$c_i = \sum_{j=1}^{s} a_{ij}, \qquad i = 1, \dots, s,$$

hinreichend dafür ist, dass ein konsistentes Runge-Kutta-Verfahren für das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(t, x)$ mit $x(t_0) = x_0$ wie für das zugehörige autonome Problem für x dieselbe numerische Lösung liefert.

Aufgabe 4. (Runge-Kutta-Verfahren beliebig hoher Ordnung)

Bestimme dasjenige Runge–Kutta-Verfahren, das man gemäß der Konstruktion aus dem Beweis von Satz 7.17 bei der Kombination der Quadraturformel (QF) mit dem Runge-Kutta-Verfahren (RKV) erhält. Dabei sei

a) (QF): Trapezregel, (RKV): explizites Euler-Verfahren bzw.

b) (QF): Simpson-Regel, (RKV): Euler-Collatz-Verfahren.

Gib dazu jeweils das Butcher-Tableau des konstruierten Verfahrens an.
