Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

10. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag**, **01.07.**

Aufgabe 1. (Asymptotische Fehlerentwicklung)

Das durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

gegebene Verfahren von Heun werde auf das Anfangswertproblem

$$\dot{x}(t) = x(t), \qquad x(0) = 1$$

angewendet. Zeige, dass für die zugehörigen asymptotischen Entwicklungen des lokalen bzw. des globalen Fehlers die Gleichungen

$$d_3(t) = -\frac{1}{12}\mathrm{e}^t, \qquad d_4(t) = -\frac{1}{24}\mathrm{e}^t \qquad \text{und} \qquad e_2(t) = -\frac{1}{12}t\mathrm{e}^t$$

gelten.

Aufgabe 2. (Autonomie-Bedingung bei Mehrschrittverfahren)

Zeige, dass konsistente Mehrschrittverfahren für das Anfangswertproblem $\dot{x}(t) = f(t,x)$ mit $x(t_0) = x_0$ wie für das zugehörige autonome Problem für x dieselbe numerische Lösung liefern, wenn die Startwerte für die Zeitkomponente gemäß

$$t(t_0 + \ell h) = t_0 + \ell h, \qquad \ell = 0, \dots, k-1$$

gewählt werden.

Aufgabe 3. (Die θ-Methode von Cauchy)

Zeige, dass die Verfahrensfunktion jedes (im Sinne der Mehrschrittverfahren) konsistenten linearen Einschrittverfahrens die folgende Form besitzt:

$$\Phi(t_i, t_{i+1}, x_i, x_{i+1}; h) = (1-\theta)f(t_i, x_i) + \theta f(t_{i+1}, x_{i+1}), \qquad \theta \in \mathbb{R}.$$

Welche Verfahren ergeben sich für $\theta \in \{0, \frac{1}{2}, 1\}$?
Für welche θ erhält man Konsistenz zweiter Ordnung?

Abgabe der Programmieraufgabe am 7. oder 8. Juli im CIP-Pool

Programmieraufgabe. (Runge-Kutta-Verfahren; Schrittweitensteuerung)

Mit dieser Aufgabe soll eine numerische Näherungslösung für Anfangswertprobleme mithilfe eines Runge-Kutta-Verfahrens bestimmt werden.
Das (klassische) Runge-Kutta-Verfahren ist durch das folgende Butcher-Tableau gegeben:

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

a) Schreibe ein Programm, das zu den Daten f, t_0, x_0, h und N das Problem

$$\dot{x}(t) = f(t, x), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad t \in [t_0, T], \qquad T = t_0 + Nh$$

unter Verwendung des klassischen Runge-Kutta-Verfahrens mit konstanter Schrittweite h löst. Zurückgegeben werden soll der Vektor $x(T)$.

b) Ergänze den Quelltext unter (a) durch eine auf Richardson-Extrapolation basierende Schrittweitensteuerung (vgl. Algorithmus 7.19), wozu als zusätzliche Variable die Toleranz τ zu berücksichtigen ist.

Teste die Implementierungen in (a) bzw. (b) jeweils am Beispiel

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \qquad A := \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \lambda_1 + \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_2 \\ \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 + \lambda_2 \end{pmatrix}, \qquad x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \qquad T := 1$$

für $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$ bzw. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -100$ durch Vergleich von $x(1)$ mit x_N für verschiedene Schrittweiten h.

Lösung zum Vergleich: Die analytischen Lösungen lauten $x(t) = (e^t - e^{-t}, e^t + e^{-t})^T$ für $\lambda_2 = -1$ bzw. $x(t) = (e^t - e^{-100t}, e^t + e^{-100t})$ im steifen Fall.

Wende (b) zusätzlich auf die folgende Quadraturaufgabe an:

$$\dot{x}(t) = \frac{c}{\cosh^2(ct)}, \qquad c := 100, \qquad x(-1) = \tanh(-c), \qquad T := 1.$$
