Einführung in die Numerik

Sommersemester 2014
Prof. Mario Bebendorf
Jos Gesenhues

universitätbonn

11. Übungsblatt

Abgabe am **Dienstag, 08.07.**

Aufgabe 1. (Mehrschrittverfahren mit Parameter)

Bestimme für das Mehrschrittverfahren

$$x_{i+3} = \gamma(x_{i+2} - x_{i+1}) + x_i + h\frac{3-\gamma}{2}\big(f(t_{i+1}, x_{i+1}) + f(t_{i+2}, x_{i+2})\big)$$

die von $\gamma \in \mathbb{R}$ abhängige Konsistenzordnung.
Zeige, dass das Verfahren nur für $\gamma \in (-1, 3)$ stabil ist.

Aufgabe 2. (Lineare Mehrschrittverfahren)

Zeige, dass jedes (o.B.d.A. autonome) lineare Mehrschrittverfahren in der Form

$$X_{i+1} = (\tilde{A} \otimes I)X_i + h(\tilde{B} \otimes I)F(X_{i+1}),$$

das heißt in Form eines Einschrittverfahrens geschrieben werden kann. Dabei bezeichne $I \in \mathbb{R}^{n\times n}$ die Einheitsmatrix und $\otimes$ das Kronecker-Produkt zweier Matrizen.
Wie übertragen sich die Voraussetzungen für Konsistenz und Stabilität?

Aufgabe 3. (Speicherschema von Skeel)

Gegeben sei ein lineares Mehrschrittverfahren der Form

$$x_{i+k} = \sum_{\ell=0}^{k-1} \alpha_\ell x_{i+\ell} + h\sum_{\ell=0}^{k} \beta_\ell f(t_{i+\ell}, x_{i+\ell}).$$

Zeige, dass zur rekursiven Auswertung des Mehrschrittverfahrens die Speicherung des Vektors $s_i := (s_i^{(0)}, \ldots, s_i^{(k-1)})^T$ genügt, wobei

$$\begin{aligned}
s_i^{(k)} &= s_{i-1}^{(k-1)} + x_{i+k} - h\beta_k f(t_{i+k}, x_{i+k}) = 0\\
s_i^{(k-1)} &= s_{i-1}^{(k-2)} - \alpha_{k-1} x_{i+k} - h\beta_{k-1} f(t_{i+k}, x_{i+k})\\
&\ \vdots\\
s_i^{(1)} &= s_{i-1}^{(0)} - \alpha_1 x_{i+k} - h\beta_1 f(t_{i+k}, x_{i+k})\\
s_i^{(0)} &= -\alpha_0 x_{i+k} - h\beta_0 f(t_{i+k}, x_{i+k}).
\end{aligned}$$

Aufgabe 4. (Lösungsdarstellung mithilfe der Eigenpaare)

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sowie zugehörigen Eigenvektoren $v_1, \dots, v_n \in \mathbb{R}^n$.
Finde eine explizite Darstellung der Lösungen des Differentialgleichungssystems

$$\dot{x}(t) = Ax(t)$$

unter Zuhilfenahme der Eigenwerte und Eigenvektoren.
Gib die Lösung im Fall $x(t_0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ an. Ist diese Lösung eindeutig?