

Aufgabe 1: Berechnen Sie die Integrale:

$$\text{a) } \int_0^1 x e^x dx, \quad \text{b) } \int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx, \quad \text{c) } \int \sqrt{x} dx.$$

Tipp: a) mit partieller Integration, b) mit Substitutionsregel, c) mit partieller Integration oder unter Verwendung von $\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$.

LÖSUNG:

a)

$$\int_0^1 x e^x dx = x e^x \Big|_0^1 - \int_0^1 e^x dx = 1 \cdot e^1 - 0 \cdot e^0 - e^x \Big|_0^1 = e - (e - 1) = 1.$$

Partielle Integration mit:

$$f(x) = e^x, \quad f'(x) = e^x, \quad g(x) = x, \quad g'(x) = 1.$$

b)

$$\int \frac{x^2}{x^3 + 5} dx = \frac{1}{3} \int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3} \log |z| = \frac{1}{3} \log |x^3 + 5|.$$

$$\text{Substitution: } z := x^3 + 5 \Rightarrow dz = 3x^2 dx \Leftrightarrow x^2 dx = \frac{1}{3} dz.$$

c)

$$\int \sqrt{x} dx = \int x^{1/2} dx = \frac{x^{1/2+1}}{1/2+1} = \frac{x^{3/2}}{3/2} = \frac{2}{3} \sqrt{x^3} = \frac{2}{3} x \sqrt{x} \quad (x \geq 0!).$$

Oder mit partieller Integration:

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x} dx &= \int 1 \cdot \sqrt{x} dx = x \cdot \sqrt{x} - \int x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \\ &= x \cdot \sqrt{x} - \frac{1}{2} \int \sqrt{x} dx \\ \Rightarrow \frac{3}{2} \int \sqrt{x} dx &= x \cdot \sqrt{x} \Leftrightarrow \int \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x \sqrt{x}. \end{aligned}$$

Dabei war

$$f(x) = x, \quad f'(x) = 1, \quad g(x) = \sqrt{x}, \quad g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Aufgabe 2: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \sin x \, dx = 0$ ja nein

b) $\int_{-1}^1 \frac{x^2}{1+x^2} \, dx = 0$ ja nein

c) $\int_{-1}^1 \frac{x^3}{1+x^2} \, dx = 0$ ja nein

d) $\int_{-\pi}^{\pi} x^3 \cos x \, dx = 0$ ja nein

e) $\int_{-\pi}^{\pi} \sqrt{1+x^2} \sin x \, dx = 0$ ja nein

Hinweis: Veranschaulichen Sie sich die zu integrierenden Funktionen und deren Symmetrieeigenschaften. Es ist nicht sinnvoll, die Integrale jeweils explizit auszurechnen.

LÖSUNG: Benutze: $\int_{-a}^a f(x) \, dx = 0$, wenn die Funktion $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ ungerade ist, d. h. wenn $f(-x) = -f(x)$ gilt. Dies folgt aus der Substitutionsregel.

Durch Anfertigen einer Skizze erkennt man, dass dies bedeutet, dass die Gesamtfläche, welche die Funktion f im Intervall $[-a, a]$ mit der x-Achse einschließt Null ist.

a) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^2 ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.

b) Nein! Da der Integrand gerade und (außer in Null) positiv ist: Gesamtfläche ist positiv.

c) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\frac{1}{1+x^2}$ ist gerade.

d) Ja! Da der Integrand ungerade ist: x^3 ist ungerade, $\cos x$ ist gerade.

e) Ja! Da der Integrand ungerade ist: $\sqrt{1+x^2}$ ist gerade, $\sin x$ ist ungerade.