Aufgabe 3: Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion $f : \mathbb{R} \setminus \{1\} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

um den Punkt $x = 0$ bis zu einem Fehlerterm der Ordnung $O(|y|^6)$.

Lösung: Ableitungen der Funktion $f(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{(1-x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(1-x)^3} \\
f^{(3)}(x) &= \frac{6}{(1-x)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1-x)^5} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{120}{(1-x)^6}
\end{aligned}$$

Taylorentwicklung von $f(y)$ um den Punkt $x = 0$:

$$\begin{aligned}
f(y) &= f(0) + f'(0)y + \frac{1}{2}f''(0)y^2 + \frac{1}{6}f^{(3)}(0)y^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)y^4 + \frac{1}{120}f^{(5)}(0)y^5 + O(|y|^6) \\
&= 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + y^5 + O(|y|^6)
\end{aligned}$$

Aufgabe 4:

a) Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor, dass

$$\lim_{h \to 0} \frac{(-f(x_0 + 2h) + 4f(x_0 + h) - 3f(x_0))}{2h} = f'(x_0)$$

gilt, für jede zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

b) Zeigen Sie, dass mit der Differenzenquotienten - Formel aus a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

Lösung:

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei 2-mal stetig differenzierbar.

Taylor ergibt:

$$\begin{aligned} f(x_0+h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot h + O(h^2) \\ f(x_0+2h) &= f(x_0) + f'(x_0)\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & (-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)) \\ = \quad & (\underbrace{-f(x_0) + 4f(x_0) - 3f(x_0)}_{=0}) + (-f'(x_0) + 2f'(x_0))\cdot 2h + O(h^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & \frac{-f(x_0+2h) + 4f(x_0+h) - 3f(x_0)}{2h} = f'(x_0) + O(h) \\ \Rightarrow\quad & \text{Beh.!} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} p(x) &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \quad \in \mathcal{P}_2 \\ p(x_0+h) &= a_0 + a_1(x_0+h) + a_2(x_0+h)^2 \\ &= a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + a_1 h + a_2 2x_0 h + a_2 h^2 \\ &= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)h + a_2 h^2 \\ p(x_0+2h) &= a_0 + a_1(x_0+2h) + a_2(x_0+2h)^2 \\ &= p(x_0) + (a_1 + 2a_2 x_0)2h + a_2 4h^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow\quad & \frac{-p(x_0+2h) + 4p(x_0+h) - 3p(x_0)}{2h} \\ = \quad & \frac{1}{2h}(\underbrace{-p(x_0) + 4p(x_0) - 3p(x_0)}_{=0}) \\ & + \frac{1}{2h}\left(-(a_1 + 2a_2 x_0)2h + 2(a_1 + 2a_2 x_0)2h\right) \\ & + \frac{1}{2h}(\underbrace{-4a_2 h^2 + 4a_2 h^2}_{=0}) \\ = \quad & a_1 + 2a_2 x_0 = p'(x_0) \quad \checkmark \end{aligned}$$