**Aufgabe 5:** Bestimmen Sie das Polynom $p(x)$ dritten Grades, das die folgenden Werte annimmt:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 10 |

a) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ über ein lineares Gleichungssystem.

b) Bestimmen Sie das gesuchte Polynom $p(x)$ unter Benutzung von Lagrange-Polynomen.

c) Wie ändert sich $p(5)$, wenn $y_2 = 5{,}02$ statt $y_2 = 5$ gesetzt wird?

LÖSUNG:

| $x_i$ | 0 | 1 | 3 | 4 |
|---|---|---|---|---|
| $y_i$ | 2 | 4 | 5 | 10 |

a) <u>Ansatz:</u> $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\begin{aligned}
p(0) = 2 \quad &\Rightarrow \quad a_0 = 2 \\
p(1) = 4 \quad &\Rightarrow \quad 2 + a_1 + a_2 + a_3 = 4 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + a_2 + a_3 = 2 \quad \text{I} \\
p(3) = 5 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 3a_1 + 9a_2 + 27a_3 = 5 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 3a_2 + 9a_3 = 1 \quad \text{II} \\
p(4) = 10 \quad &\Rightarrow \quad 2 + 4a_1 + 16a_2 + 64a_3 = 10 \\
&\Leftrightarrow \quad a_1 + 4a_2 + 16a_3 = 2 \quad \text{III}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{II} - \text{I}: \quad & 2a_2 + 8a_3 = -1 \\
\text{III} - \text{I}: \quad & 3a_2 + 15a_3 = 0 \;\Leftrightarrow\; a_2 = -5a_3 \\
& \Rightarrow\; -10a_3 + 8a_3 = -1 \\
& \Leftrightarrow\; 2a_3 = 1 \;\Leftrightarrow\; a_3 = \frac{1}{2} \\
& \Rightarrow\; a_2 = -\frac{5}{2} \\
\Rightarrow \quad & a_1 = 2 - a_2 - a_3 = 2 + \frac{5}{2} - \frac{1}{2} = 4 \\
\Rightarrow \quad & p(x) = 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3
\end{aligned}$$

<u>Probe:</u>

$$\begin{aligned}
p(0) &= 2 \quad \checkmark \\
p(1) &= 2 + 4 - \frac{5}{2} + \frac{1}{2} = 4 \quad \checkmark \\
p(3) &= 2 + 12 - \frac{45}{2} + \frac{27}{2} = 14 - \frac{18}{2} = 14 - 9 = 5 \quad \checkmark \\
p(4) &= 2 + 16 - 40 + 32 = 50 - 40 = 10 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b) Lagrangeformel: $p(x) = 2p_0(x) + 4p_1(x) + 5p_2(x) + 10p_3(x)$
mit:

$$\begin{aligned}
p_0(x) &= \frac{(x-1)(x-3)(x-4)}{(0-1)(0-3)(0-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x-1)(x^2-7x+12) \\
&= \left(-\frac{1}{12}\right)(x^3-8x^2+19x-12) \\
&= -\frac{1}{12}x^3 + \frac{2}{3}x^2 - \frac{19}{12}x + 1 \\
p_1(x) &= \frac{x(x-3)(x-4)}{1(1-3)(1-4)} \\
&= \frac{1}{6}(x^3-7x^2+12x) \\
&= \frac{1}{6}x^3 - \frac{7}{6}x^2 + 2x \\
p_2(x) &= \frac{x(x-1)(x-4)}{3(3-1)(3-4)} \\
&= \left(-\frac{1}{6}\right)(x^3-5x^2+4x) \\
&= -\frac{1}{6}x^3 + \frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}x \\
p_3(x) &= \frac{x(x-1)(x-3)}{4(4-1)(4-3)} \\
&= \frac{1}{12}(x^3-4x^2+3x) \\
&= \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p(x) &= \left(-\frac{2}{12} + \frac{4}{6} - \frac{5}{6} + \frac{10}{12}\right)x^3 \\
&\quad + \left(\frac{4}{3} - \frac{14}{3} + \frac{25}{6} - \frac{10}{3}\right)x^2 \\
&\quad + \left(-\frac{19}{6} + 8 - \frac{10}{3} + \frac{5}{2}\right)x \\
&\quad + 2\cdot 1 \\
&= 2 + 4x - \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
p(5) &= 2 + 20 - \frac{125}{2} + \frac{125}{2} = 22 \\
\tilde{p}(x) &= p(x) + 0{,}02 \cdot p_2(x) \\
\Rightarrow \tilde{p}(5) &= p(5) + 0{,}02 \cdot p_2(5) \\
&= 22 + \frac{2}{100} \cdot \left( -\frac{125}{6} + \frac{125}{6} - \frac{10}{3} \right) \\
&= 22 - \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{3} \\
&= 22 - \frac{1}{15}
\end{aligned}
$$