

Aufgabe 6: Gegeben sei eine stetige Funktion $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, die wir auf dem Definitionsbereich numerisch integrieren wollen. Dazu teilen wir das Intervall $[0, 1]$ in vier gleichgroße Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$ mit $x_i = \frac{i}{4}$ auf und approximieren f auf jedem Teilintervall durch eine affine Funktion.

- Berechnen Sie die Integrale der Lagrangepolynome über die Teilintervalle. (Welche Integrale müssen gleich sein?)
- Bestimmen Sie basierend darauf eine numerische Integrationsformel.

LÖSUNG: Um die Funktion f auf dem Teilintervall $[x_i, x_{i+1}] = [\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$ durch eine affine Funktion zu approximieren benötigen wir zwei Lagrangepolynome. $L_i(x)$ und $L_{i+1}(x)$, wobei $L_i(x_i) = 1$, $L_i(x_{i+1}) = 0$, $L_{i+1}(x_i) = 0$ und $L_{i+1}(x_{i+1}) = 1$. Diese sind gegeben durch

$$L_i(x) = \frac{(x - \frac{i+1}{4})}{(\frac{i}{4} - \frac{i+1}{4})} = -4x + (i + 1)$$
$$L_{i+1}(x) = \frac{(x - \frac{i}{4})}{(\frac{i+1}{4} - \frac{i}{4})} = 4x - i$$

- Betrachtet man das Intervall $[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}]$, so handelt es sich bei der Fläche unter den beiden Funktion L_i und L_{i+1} jeweils um ein Dreieck mit denselben Seitenlängen. Somit gilt

$$\int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_i(x) dx = \int_{\frac{i}{4}}^{\frac{i+1}{4}} L_{i+1}(x) dx.$$

Des weiteren ist der Wert dieser Integrale für alle vier Teilintervalle gleich, so dass wir die Rechnung vereinfachen können, indem wir das Intervall $[0, \frac{1}{4}]$ betrachten.

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{1}{4}} L_0(x) dx &= \int_0^{\frac{1}{4}} -4x + 1 dx \\ &= -2x^2 + x \Big|_0^{\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

- Um die Funktion f auf dem ganzen Intervall $[0, 1]$ zu integrieren, spalten wir das Integral in Teilintegrale über die Intervalle $[x_i, x_{i+1}]$ auf. Des weiteren integrieren wir auf diesen Intervallen nicht die Funktion f , sondern ihre affine

Approximation.

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x) dx &\approx \sum_{i=0}^3 \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x_i)L_i(x) + f(x_{i+1})L_{i+1}(x) dx \\ &= \sum_{i=0}^3 f(x_i) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_i(x) dx + f(x_{i+1}) \int_{x_i}^{x_{i+1}} L_{i+1}(x) dx \\ &= \frac{1}{8} \sum_{i=0}^3 [f(x_i) + f(x_{i+1})] \\ &= \frac{1}{8} \left[f(x_0) + 2 \sum_{i=1}^3 f(x_i) + f(x_4) \right]\end{aligned}$$