Aufgabe 7: Berechnen Sie die folgenden Ausdrücke:

a) $(4+3i)+2(6-2i)=?$

b) $(4+3i)(6-2i)=?$

c) $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=?$ Interpretieren Sie dies geometrisch!

LÖSUNG:

a)

$$\begin{aligned}(4+3i)+2(6-2i) &= 4+3i+12-4i\\ &= 16-i\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}(4+3i)(6-2i) &= 24+18i-8i+6\\ &= 30+10i\end{aligned}$$

c) Umrechnung in Polarkoordinaten.

$$r=\frac{\sqrt{3+1}}{2}=1, \qquad \sin\phi=\frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad \phi=\frac{\pi}{6}$$

Damit ergibt sich

$$\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i=\exp\left(i\frac{\pi}{6}\right), \qquad \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3=\exp\left(i\frac{\pi}{2}\right)=i.$$

Wegen $r=1$ handelt es sich bei der Multiplikation um eine reine Drehung in der komplexen Zahlenebene, und zwar um den Winkel $\phi=\frac{\pi}{6}$. Daher wird 1 drei mal um jeweils 30°, also insgesamt um 90° nach links gedreht.

Alternativ:

$$\begin{aligned}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^3 &= \left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)\\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{3}{4}i+\frac{1}{4}i-\frac{\sqrt{3}}{4}\\ &= i\end{aligned}$$

Aufgabe 8: Berechnen Sie die Lösungen der folgenden quadratischen Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie beide Lösungen in der Form $x = a + ib$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

a) $x^2 + (1-3i)x - 2 - 2i = 0$

b) $x^2 + 2\sqrt{2}x - 2\sqrt{3}i = 0$

Tipp: $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$, $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

LÖSUNG: Verwende die p-q-Formel:

a)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{1-3i}{2} \pm \sqrt{\frac{(1-3i)^2}{4} + 2 + 2i} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{1-6i-9+8+8i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{\sqrt{2}\sqrt{i}}{2} \\
&= -\frac{1-3i}{2} \pm \frac{1+i}{2}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = 2i, \quad x_2 = -1 + i$

Dabei ist $\sqrt{i} = \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}}$.

b)

$$\begin{aligned}
x_{1,2} &= -\frac{2\sqrt{2}}{2} \pm \sqrt{2 + 2\sqrt{3}i} \\
&= -\sqrt{2} \pm \sqrt{4}\sqrt{\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)i} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{e^{i\frac{\pi}{3}}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2e^{i\frac{\pi}{6}} \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) \\
&= -\sqrt{2} \pm \left(\sqrt{3} + i\right)
\end{aligned}$$

$\Rightarrow x_1 = -\sqrt{2} + \sqrt{3} + i, \quad x_2 = -\sqrt{2} - \sqrt{3} - i$

Um sich die Winkel zu überlegen, ist eine Skizze hilfreich.