Aufgabe 9: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

d.h. bestimmen Sie eine Diagonalmatrix D sowie eine Orthogonalmatrix U, so dass $A = UDU^T$ gilt.

LÖSUNG: **Berechnung des charakteristischen Polynoms:**

$$P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = (3-\lambda)^2 - 1$$

Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} & P(\lambda) &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & (3-\lambda)^2 - 1 &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \lambda &=& \; 3 \pm \sqrt{1} = 2 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$:

$$\begin{aligned} & (A - 2\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \\ \Rightarrow \; & x &=& \; -y \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_1 = 2$.

Berechnung eines Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$:

$$\begin{aligned} & (A - 4\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &=& \; 0 \\ \Leftrightarrow \; & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} && \\ \Rightarrow \; & x &=& \; y \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist normierter Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_2 = 4$.

$$\Rightarrow U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U^{-1} = U^T = U$$

$$
\begin{aligned}
U^T A U &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 4 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 10: a) Es sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Welche geometrische Figur stellt die Menge

$$M := \{x \mid Ax \cdot x = 1\}$$

dar?

b) Es sei

$$\tilde{A} = GAH = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} A \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

mit der Matrix A aus Teil a). Welche geometrische Bedeutung haben die beiden Matrizen G und H? Welche geometrische Figur stellt die Menge

$$\tilde{M} := \{x \mid \tilde{A}x \cdot x = 1\}$$

dar?

c) Sei weiterhin $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ mit einem negativen Eigenwert. Welche geometrische Figur stellt die Menge $N := \{x \mid Bx \cdot x = 1\}$ dar?

LÖSUNG:

a)

$$
\begin{aligned}
M &:= \left\{ x \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \right\} \\
&= \left\{ x \,\middle|\, \begin{pmatrix} 2x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = 1 \right\} \\
&= \left\{ x \,\middle|\, 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 = 1 \right\} \\
&= \left\{ x \,\middle|\, \left(\frac{x_1}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \right)^2 + \left(\frac{x_2}{\sqrt{2}} \right)^2 = 1 \right\}
\end{aligned}
$$

Bei der Menge M handelt es sich also um eine Ellipse mit Halbachsen der Länge $\frac{1}{\sqrt{2}}$ in Richtung der x_1-Achse und $\sqrt{2}$ in Richtung der x_2-Achse.

b)

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) & -\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) & \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

Bei der Matrix G handelt es sich um eine Drehmatrix, die um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ dreht und bei der Matrix H um eine Drehmatrix, die um den Winkel $-\frac{\pi}{2}$ dreht. Es gilt also $H = G^{-1}$ und da sowohl G als auch H orthogonal sind gilt auch $H = G^T$.

$$\begin{aligned} \tilde{M} &:= \left\{x \,|\, \tilde{A}x \cdot x = 1\right\} \\ &= \{x \,|\, GAHx \cdot x = 1\} \\ &= \{x \,|\, AHx \cdot Hx = 1\} \end{aligned}$$

Da Hx bedeutet, dass der Vektor x um den Winkel $\frac{\pi}{2}$ gedreht wird, ist $\tilde{M}$ die um $\frac{\pi}{2}$ gedrehte Ellipse, die durch die Menge M dargestellt wird.

c) Bei der Menge N handelt es sich um zwei Hyperbel-Äste, die durch die Gleichung $y = \pm\sqrt{4x^2 - 2}$ beschrieben werden.