Aufgabe 12: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

mit Anfangswert $y(0) = 1$.

LÖSUNG: Diese Differentialgleichung lösen wir mit Separation der Variablen

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = -\frac{t}{y(t)}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \qquad & \int_{y(0)}^{y(t)} \tilde{y}\, d\tilde{y} = -\int_0^t s\, ds \\
\Leftrightarrow \qquad & \frac{1}{2}y^2(t) - \frac{1}{2}y^2(0) = -\frac{1}{2}t^2 \\
\Leftrightarrow \qquad & y^2(t) = 1 - t^2 \\
\Leftrightarrow \qquad & y(t) = \pm\sqrt{1-t^2}
\end{aligned}$$

Da die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sein muss, ist nur

$$y(t) = \sqrt{1-t^2}$$

eine Lösung.

Aufgabe 13: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \frac{y(t)}{t}$$

für $t > 1$ mit dem Anfangswert $y(1) = 1$.

LÖSUNG: Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung einer Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t)$$

mit Anfangswert $y_0 = y(t_0)$ gegeben ist durch

$$y(t) = \exp\left(\int_{t_0}^t a(s)\, ds\right) y_0.$$

In unseren Fall ist $a(t) = \frac{1}{t}$, so dass wir als Lösung für unsere Differentialgleichung

$$\begin{aligned}
y(t) &= \exp\left(\int_1^t \frac{1}{s}\, ds\right) \cdot 1 \\
&= \exp\left(\ln t - \ln 1\right) \\
&= e^{\ln t} \\
&= t
\end{aligned}$$

erhalten.

Alternativ: Diese Aufgabe lässt sich auch durch Separation der Variablen lösen.