

Aufgabe 14: Prüfen Sie, ob die folgenden Mengen offen, abgeschlossen, und/oder beschränkt sind:

a) $B_1(y) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - y\| < 1\}$

b) $B_1(0) \setminus B_1((1, 0, \dots, 0))$

c) $\mathbb{R}^n \setminus (B_1(0) \cup B_1((2, 0, \dots, 0)))$

d) $B_1(0) \cap B_1((1, 0, \dots, 0))$

LÖSUNG:

a) $B_1(y)$ ist offen und beschränkt.

b) $B_1(0) \setminus B_1((1, 0, \dots, 0))$ ist weder offen noch abgeschlossen, sondern nur beschränkt.

c) $\mathbb{R}^n \setminus (B_1(0) \cup B_1((2, 0, \dots, 0)))$ ist abgeschlossen, denn sowohl $B_1(0)$ als auch $B_1((2, 0, \dots, 0))$ sind offen, die Vereinigung offener Mengen ist wieder offen und \mathbb{R}^n ohne eine offene Menge ist abgeschlossen. Die Menge ist allerdings nicht beschränkt.

d) $B_1(0) \cap B_1((1, 0, \dots, 0))$ ist offen, denn der Schnitt zweier offener Mengen ist offen. Zudem ist die Menge beschränkt.