Aufgabe 15: Berechnen Sie die Ableitung der Funktion

$$f(x) := \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy.$$

LÖSUNG:

$$f(x) = \int_{-x^2}^{x^2} \frac{\sin(xy)}{y}\, dy\,.$$

Leibniz-Regel $\Rightarrow$

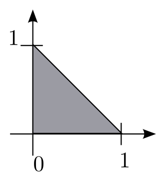
$$\begin{aligned}
f'(x) &= \int_{-x^2}^{x^2} \cos(xy)\, dy + \frac{\sin(x^3)}{x^2} \cdot 2x - \frac{\sin(-x^3)}{-x^2} \cdot (-2x) \\
&= 2\frac{\sin(x^3)}{x} + 2\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{1}{x}\int_{-x^3}^{x^3} \cos z\, dz \quad (z = xy,\ dz = x\, dy) \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin z}{x}\Big|_{-x^3}^{x^3} \\
&= 4\frac{\sin(x^3)}{x} + \frac{\sin(x^3)}{x} - \frac{\sin(-x^3)}{x} \\
&= 6\frac{\sin(x^3)}{x}
\end{aligned}$$

Benutzt: $\sin(-x^3) = -\sin(x^3)$

Aufgabe 16: Integrieren Sie die Funktion

$$f(x,y) = x^2y^2$$

über das in der folgenden Zeichnung dargestellte Gebiet



Lösung:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^{1-x} x^2 y^2 \, dy dx &= \int_0^1 x^2 \int_0^{1-x} y^2 \, dy \, dx \\
&= \int_0^1 x^2 \left[\frac{1}{3} y^3\right]_0^{1-x} dx \\
&= \int_0^1 x^2 \frac{1}{3}(1-x)^3 \, dx \\
&= \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4} x^2 (1-x)^4 \Big|_0^1 + \frac{2}{4}\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx\right) \\
&= \frac{2}{3 \cdot 4}\int_0^1 x(1-x)^4 \, dx \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2}\left(-\frac{1}{5} x (1-x)^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{5}\int_0^1 (1-x)^5 \, dx\right) \\
&= -\frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6}(1-x)^6 \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 6} \\
&= \frac{1}{180}
\end{aligned}$$

Alternativ kann man die Integration der Funktion $f(x, y)$ über das dargestellte Gebiet auch wie folgt ansetzen:

$$\int_0^1 \int_0^{1-y} x^2 y^2 \, dx \, dy$$