Aufgabe 1: Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right) x^3 .$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von $f(x)$.

b) Bestimmen Sie Kandidaten für lokale Extrempunkte von $f(x)$ und die Funktionswerte an diesen Stellen.

c) Bestimmen Sie weiterhin, ob es sich bei diesen Punkten um ein Minimum, Maximum oder einen Wendepunkt handelt.

d) Wie verhält sich $f(x)$ im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$?

e) Skizzieren Sie die Funktion.

Aufgabe 2: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix} .$$

b) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} .$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(A)$.

iii) Berechnen Sie $\mathrm{Bild}(A)$.

iv) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A)$.

Aufgabe 3: a) Zeigen Sie: Für drei beliebige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt stets

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = (a \times b) \cdot c\,.$$

b) Berechnen Sie Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4: Betrachten Sie eine Ebene E durch den Ursprung, die durch die beiden Richtungsvektoren $(1, 2, 3)$ und $(5, 6, 7)$ aufgespannt wird.

a) Stellen Sie die Matrix S auf, die eine Spiegelung an E beschreibt.

b) Geben Sie Bild(S) an.

c) Geben Sie S^2 an.

d) Stellen Sie die Matrix P auf, die eine (orthogonale) Projektion auf E beschreibt.

e) Geben Sie Bild(P) an.

f) Geben Sie P^2 an.