Aufgabe 1: Betrachten Sie die reelle Funktion

$$f(x) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right) x^3 \,.$$

a) Bestimmen Sie die Menge der Nullstellen von $f(x)$.

b) Bestimmen Sie Kandidaten für lokale Extrempunkte von $f(x)$ und die Funktionswerte an diesen Stellen.

c) Bestimmen Sie weiterhin, ob es sich bei diesen Punkten um ein Minimum, Maximum oder einen Wendepunkt handelt.

d) Wie verhält sich $f(x)$ im Unendlichen, d.h. für $x \to \pm\infty$?

e) Skizzieren Sie die Funktion.

Lösung:

a) Bestimmung der Nullstellen:

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

($\exp(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$)

b) Notwendige Bedingung für Extrempunkte ist eine Nullstelle der ersten Ableitung:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x)x^3 + \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)3x^2 \\ &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x^4 + 3x^2) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)3x^2(1-x^2) \\ f'(x) &= 0 \Leftrightarrow 3x^2(1-x)(1+x) = 0 \end{aligned}$$

Also sind $x = -1$, $x = 0$, $x = 1$ potentielle Extrempunkte mit folgenden Funktionswerten:

$$f(-1) = -\exp\left(-\tfrac{3}{2}\right), \quad f(0) = 0, \quad f(1) = \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right)$$

c) Wir verwenden die zweite Ableitung um Maxima und Minima zu bestimmen:

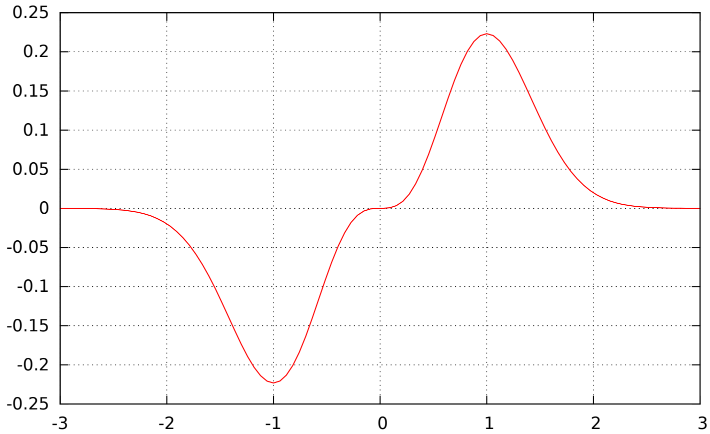
$$\begin{aligned} f''(x) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-3x)(-3x^4 + 3x^2) + \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(-12x^3 + 6x) \\ &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}x^2\right)(9x^5 - 21x^3 + 6x) \\ f''(-1) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot 6 > 0 \Rightarrow \text{ Minimum} \\ f''(1) &= \exp\left(-\tfrac{3}{2}\right) \cdot (-6) < 0 \Rightarrow \text{ Maximum} \\ f''(0) &= 0 \Rightarrow \text{ unklar!} \end{aligned}$$

An $x = 0$ kann aber weder ein Minimum noch ein Maximum liegen, da die Funktion punktsymmetrisch ist ($\exp(-\frac{3}{2}x^2)$ ist wegen x^2 symmetrisch, x^3 ist

punktsymmetrisch, also ist das Produkt punktsymmetrisch). Folglich befindet sich an $x = 0$ ein Wendepunkt.
(Alternativ: Die erste Ableitung besitzt sowohl links als auch rechts von 0 ein positives Vorzeichen, da $\exp(-\frac{3}{2}x^2)$ immer positiv ist, $3x^2 > 0$ für $x \neq 0$ und $1 - x^2 > 0$ für $|x| < 1$.)

d) Es gilt $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = 0$. ($\exp(-\frac{3}{2}x^2) = \frac{1}{e^{\frac{3}{2}x^2}}$ und in diesem Bruch wächst der Nenner für $x \to \pm\infty$ monoton und unbeschränkt an.)

e)



Aufgabe 2: a) Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 2 & -6 & 7 \\ 3 & -8 & 11 \end{pmatrix}.$$

b) Es gilt

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 6 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

i) Berechnen Sie $\det(A)$.

ii) Berechnen Sie $\mathrm{Ker}(A)$.

iii) Berechnen Sie $\mathrm{Bild}(A)$.

iv) Berechnen Sie $\mathrm{Rang}(A)$.

LÖSUNG:

a) Gauß-Elimination:

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 4\\ 2 & -6 & 6\\ 3 & -8 & 7\end{pmatrix}\quad \begin{matrix}\cdot(-2) & \cdot(-3)\\ \hookleftarrow + & \\ & \hookleftarrow +\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 6\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 4 & -7\end{pmatrix}\quad \begin{matrix} \\ \cdot(-2)\\ \hookleftarrow +\end{matrix}$$

$$\begin{pmatrix}1 & -4 & 6\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow L = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix}1 & -4 & 6\\ 0 & 2 & -5\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

b) i) Nach der Produktregel für Determinanten gilt:

$$\det(A) = \det(LR) = \det(L)\det(R) = (1\cdot 1\cdot 1)\cdot(1\cdot 2\cdot 3) = 6$$

ii) Da R als Resultat der Gauß-Elimination keine Nullzeile enthält, ist $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.

iii) Wegen $\mathrm{Ker}(A) = \{0\}$ muss $\mathrm{Bild}(A) = \mathbb{R}^3$ gelten.

iv) Entsprechend ist $\mathrm{Rang}(A) = 3$.

Aufgabe 3: a) Zeigen Sie: Für drei beliebige Vektoren $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ gilt stets

$$\det\begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = (a\times b)\cdot c\,.$$

b) Berechnen Sie Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix}.$$

c) Berechnen Sie die Determinante der Matrix

$$P = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&1&0\\0&0&0&1&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Lösung:

a) Entwicklung nach 3. Spalte ergibt (siehe auch Skript):

$$\det \begin{pmatrix} | & | & | \\ a & b & c \\ | & | & | \end{pmatrix} = c_1(\underbrace{a_2b_3 - a_3b_2}_{(a\wedge b)_1}) + c_2\,\underbrace{(-1)(a_1b_3 - a_3b_1)}_{(a\wedge b)_2} + c_3(\underbrace{a_1b_2 - a_2b_1}_{(a\wedge b)_3})$$
$$= c \cdot (a \wedge b)$$

b) Das Dreieck wird durch die Vektoren $(1,3)$ und $(4,6)$ aufgespannt. Die Determinante der Matrix mit diesen Vektoren als Zeilen ergibt den Flächeninhalt des aufgespannten Parallelogramms, also das Doppelte der gesuchten Fläche A.

$$A = \frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{2}|1\cdot 6 - 3 \cdot 4| = 3$$

c) Mit 3 Zeilenvertauschungen ergibt sich die Einheitsmatrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leadsto \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Damit gilt $\det(P) = (-1)^3 \det(\mathbb{1}) = -1$.

Alternativ:

- Entwicklung nach Zeilen oder Spalten führt jeweils zu nur einer kleineren Matrix gleicher Struktur. Bei der Entwicklung sind die Vorfaktoren $(-1)^{i+j}$ zu beachten $(1+6=7, 1+5=6, 1+4=5, 1+3=4, 1+2=3)$, die zu 3 Vorzeichenwechseln führen und somit das Ergebnis -1 liefern.
- Gauß-Elimination benötigt ebenfalls 3 Zeilenvertauschungen (und keine weiteren Operationen).

Aufgabe 4: Betrachten Sie eine Ebene E durch den Ursprung, die durch die beiden Richtungsvektoren $(1,2,3)$ und $(5,6,7)$ aufgespannt wird.

a) Stellen Sie die Matrix S auf, die eine Spiegelung an E beschreibt.

b) Geben Sie $\text{Bild}(S)$ an.

c) Geben Sie S^2 an.

d) Stellen Sie die Matrix P auf, die eine (orthogonale) Projektion auf E beschreibt.

e) Geben Sie $\text{Bild}(P)$ an.

f) Geben Sie P^2 an.

LÖSUNG: Mit Hilfe der Richtungsvektoren berechnen wir eine Normalenrichtung:

$$\tilde{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix}$$

Normiert:

$$n = \frac{1}{\sqrt{96}} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{4\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

a) $S = \mathbb{1} - 2nn^T$, explizit:

$$S = \mathbb{1} - 2\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \left(3\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

b) $\text{Bild}(S) = \mathbb{R}^3$, denn zu jedem Punkt $y \in \mathbb{R}^3$ kann man einen Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ finden, so dass $y = Sx$. (x ist gerade das Spiegelbild von y.)
Alternativ: Gauß-Elimination auf den Spalten.

c) $S^2 = (\mathbb{1} - 2nn^T)(\mathbb{1} - 2nn^T) = \mathbb{1} - 4nn^T + 4nn^T nn^T = \mathbb{1}$
Alternativ: Matrizenmultiplikation.

d) $P = \mathbb{1} - nn^T$, explizit:

$$P = \mathbb{1} - \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \left(6\mathbb{1} - \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

e) $\text{Bild}(P) = E = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid x \cdot n = 0\}$ (Bei einer Projektion wird jeder Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ auf einen Punkt der Ebene abgebildet. Außerdem hat jeder Punkt der Ebene sich selbst als Urbild.)
Alternativ: Gauß-Elimination auf den Spalten.

f) $P^2 = (\mathbb{1} - nn^T)(\mathbb{1} - nn^T) = \mathbb{1} - 2nn^T + nn^T nn^T = \mathbb{1} - nn^T = P$
Alternativ: Matrizenmultiplikation.