

Aufgabe 9: Berechnen Sie folgende Integrale mit Hilfe partieller Integration:

$$\begin{aligned} \text{a) } & \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx, & \text{b) } & \int_0^{\pi} \sin^4 x dx, \\ \text{c) } & \int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x dx, & \text{d) } & \int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x dx. \end{aligned}$$

LÖSUNG:

a) $\int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx = \frac{3}{10}(e^{\pi} + 1)$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = e^x, f'(x) = e^x, g(x) = \sin(3x), g'(x) = 3 \cos(3x)$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx &= e^x \sin(3x) \Big|_0^{\pi} - 3 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx \\ &= \underbrace{e^{\pi} \sin(3\pi)}_{=0} - \underbrace{e^0 \sin(3 \cdot 0)}_{=\sin(0)=0} - 3 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx \\ &= -3 \int_0^{\pi} e^x \cos(3x) dx \\ &= -3e^x \cos(3x) \Big|_0^{\pi} - 9 \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx \quad (*) \\ &= -3e^{\pi} \underbrace{\cos(3\pi)}_{=\cos(\pi)=-1} + 3e^0 \underbrace{\cos(3 \cdot 0)}_{=\cos(0)=1} - \\ &\quad 9 \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx \\ &= 3(e^{\pi} + 1) - 9 \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow 10 \int_0^{\pi} e^x \sin(3x) dx = 3(e^{\pi} + 1). \Rightarrow \text{Beh.}!$$

(*) Partielle Integration mit: $f(x) = e^x, f'(x) = e^x, g(x) = \cos(3x), g'(x) = -3 \sin(3x)$.

b) $\int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{8}$. Denn: Partielle Integration mit

$$f(x) = -\cos x, \quad f'(x) = \sin x, \quad g(x) = \sin^3 x, \quad g'(x) = 3\sin^2 x \cos x$$

ergibt:

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin x \sin^3 x \, dx &= -\cos x \sin^3 x \Big|_0^{\pi} + 3 \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x \, dx \\ &= 3 \int_0^{\pi} \cos^2 x \sin^2 x \, dx \quad (\text{da } \sin 0 = \sin \pi = 0) \\ &= 3 \int_0^{\pi} (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \, dx \quad (\cos^2 x + \sin^2 x = 1!) \\ &= 3 \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx - 3 \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx. \\ \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx &= \frac{3}{4} \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx. \\ \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \int_0^{\pi} \sin x \sin x \, dx \\ &= -\cos x \sin x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \\ &= \int_0^{\pi} \cos^2 x \, dx \quad (-\cos x \sin x \Big|_0^{\pi} = 0, \text{ da } \sin 0 = \sin \pi = 0) \\ &= \int_0^{\pi} 1 \, dx - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx \\ &= \pi - \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx. \\ \Rightarrow \int_0^{\pi} \sin^2 x \, dx &= \frac{\pi}{2}, \quad \text{und} \quad \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{3}{4} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{8}. \end{aligned}$$

c) $\int_{-\pi}^{\pi} \sin^5 x \, dx = 0$, da $f(x) = \sin^5 x$ ungerade ist: $f(-x) = [\sin(-x)]^5 = [-\sin x]^5 = -\sin^5 x = -f(x)$.

d) Nach b) gilt (Zwischenergebnis dort):

$$\int_0^{\pi} \sin^2 x \cos^2 x \, dx = \frac{1}{3} \int_0^{\pi} \sin^4 x \, dx = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{8}.$$

Aufgabe 10: Geben Sie die Formel für die Taylorentwicklung dritter Ordnung einer Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $x = 1$ an. Wenden Sie diese Formel auf $f(x) = \sin(\pi x)$.

LÖSUNG:

$$f(y) = f(1) + f'(1)(y-1) + \frac{1}{2}f''(1)(y-1)^2 + \frac{1}{6}f'''(1)(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Mit $f(x) = \sin(\pi x)$ ergibt sich

$$f(y) = -\pi(y-1) + \frac{\pi^3}{6}(y-1)^3 + O((y-1)^4)$$

Aufgabe 11: • Berechnen Sie die Taylorentwicklung der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

um die Stelle 0 bis zur Ordnung 4, das heißt mit Restglied fünfter Ordnung.

- Welche Regelmäßigkeit lässt sich erkennen? Stellen Sie eine Vermutung für die weiteren Terme der Entwicklung auf.
- Stellen Sie die zu approximierende Funktion f sowie alle errechneten (und vermuteten) Taylor-Polynome aufsteigender Ordnung graphisch mit Hilfe eines geeigneten Programms dar.

LÖSUNG:

•

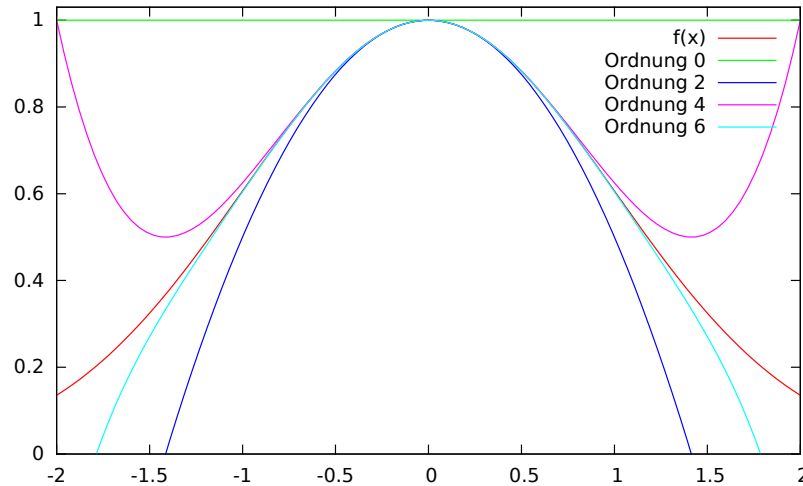
$$\begin{aligned} f'(x) &= -x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ f''(x) &= -\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ f^{(3)}(x) &= x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2x \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^3 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ f^{(4)}(x) &= \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + 2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \\ &\quad - 2x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - 3x^2 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) + x^4 \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(x) &= 1 + 0x + \frac{1}{2}(-1 + 0)x^2 + \frac{1}{6}(0 + 0 - 0)x^3 + \frac{1}{24}(1 - 0 + 2 - 0 - 0 + 0)x^4 + O(x^5) \\ &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} + O(x^5) \end{aligned}$$

- Es handelt sich um die Exponentialreihe mit Argument $-\frac{x^2}{2}$, d.h.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(-\frac{x^2}{2}\right)^n = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48} + \dots$$

•



Aufgabe 12: Zwischen geographischer Breite B und reduzierter Breite β besteht der Zusammenhang

$$\beta = \arctan(\sqrt{1 - \epsilon^2} \tan B),$$

wobei

$$\epsilon = \sqrt{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^2}$$

die numerische Exzentrizität des Erdellipsoids mit Halbachsen a und b ist.

Entwickeln Sie die Differenz $\beta - B$ nach Potenzen von ϵ mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$.

Anleitung: Wir definieren $w := \tan \beta$ und $w_0 := \tan B$. Damit läßt sich die Differenz schreiben als

$$\begin{aligned} \beta - B &= \arctan\left(\sqrt{1 - \epsilon^2} \tan B\right) - B \\ &= \arctan w - \arctan w_0. \end{aligned}$$

- Entwickeln Sie $\arctan(w)$ um w_0 bis zum Fehlerterm $O(|w - w_0|^2)$.
- Um $w - w_0$ darzustellen entwickeln Sie $f(\epsilon) = \sqrt{1 - \epsilon^2}$ um den Punkt 0 bis $O(\epsilon^4)$.

LÖSUNG:

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$$

Entwickeln wir die Funktion $\arctan w$ um w_0 so erhalten wir also

$$\arctan w = \arctan w_0 + \frac{1}{1+w_0^2}(w-w_0) + O(|w-w_0|^2)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \beta - B &= \arctan w - \arctan w_0 \\ &= \frac{w-w_0}{1+w_0^2} + O(|w-w_0|^2) \end{aligned}$$

Da sich die Differenz $w-w_0$ schreiben lässt als

$$\begin{aligned} w-w_0 &= \tan \beta - \tan B \\ &= \sqrt{1-\epsilon^2} \tan B - \tan B \end{aligned} \tag{1}$$

entwickeln wir $\sqrt{1-\epsilon^2}$.

$$\begin{aligned} f(x) &:= \sqrt{1-x^2} \\ f(\epsilon) &= f(0) + f'(0)\epsilon + \frac{f''(0)}{2}\epsilon^2 + \frac{f'''(0)}{6}\epsilon^3 + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$f'''(x) = -\frac{3x}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{1-\epsilon^2} = 1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)$$

Eingesetzt in (1) ergibt das

$$\begin{aligned} w-w_0 &= \left(1 - \frac{\epsilon^2}{2} + O(\epsilon^4)\right) \tan B - \tan B \\ &= -\frac{\epsilon^2}{2} \tan B + O(\epsilon^4) \end{aligned}$$

Daran sieht man auch $w-w_0 = O(\epsilon^2)$.

Die Entwicklung der Differenz $\beta-B$ nach Potenzen von ϵ mit einem Fehlerterm $O(\epsilon^4)$ sieht also wie folgt aus

$$\begin{aligned} \beta - B &= \frac{-\frac{\epsilon^2}{2} \tan B + O(\epsilon^4)}{1 + \tan^2 B} + \underbrace{O(|w-w_0|^2)}_{=O(\epsilon^4)} \\ &= \left(-\frac{\epsilon^2}{2}\right) \frac{\tan B}{1 + \tan^2 B} + O(\epsilon^4). \end{aligned}$$