Aufgabe 13: Bestimmen Sie ein quadratisches Polynom $p(x)$, das in 0, $\frac{\pi}{2}$ und π mit $f(x) = \sin x$ übereinstimmt.
Rechnen Sie den Fehler $|f(x) - p(x)|$ in $x = \frac{\pi}{4}$ explizit aus.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x \\ f(0) &= \sin 0 = 0 \\ f(\pi/2) &= \sin(\pi/2) = 1 \\ f(\pi) &= \sin(\pi) = 0 \\ f(\pi/4) &= \sin(\pi/4) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Gesucht: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ mit $p(0) = 0,\ p(\pi/2) = 1,\ p(\pi) = 0$

Lagrangeformel: $p(x) = 0\, p_0(x) + 1\, p_{\frac{\pi}{2}}(x) + 0\, p_\pi(x)$

$$\begin{aligned} p_{\frac{\pi}{2}}(x) &= \frac{(x-0)(x-\pi)}{(\frac{\pi}{2}-0)(\frac{\pi}{2}-\pi)} \\ &= -\frac{4}{\pi^2}x(x-\pi) = \frac{4}{\pi}x - \frac{4}{\pi^2}x^2 \end{aligned}$$

Alternativ:

$$\begin{aligned} p(0) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_0 = 0 \\ p(\pi/2) = 1 &\quad\Rightarrow\quad a_1\frac{\pi}{2} + a_2\frac{\pi^2}{4} = 1 \\ &\quad\Rightarrow\quad 2a_1\pi + a_2\pi^2 = 4 \quad \mathrm{I} \\ p(\pi) = 0 &\quad\Rightarrow\quad a_1\pi + a_2\pi^2 = 0 \quad \mathrm{II} \end{aligned}$$

I-II: $a_1\pi = 4 \ \Rightarrow\ a_1 = \frac{4}{\pi}$
Einsetzen in II: $4 + a_2\pi^2 = 0 \ \Leftrightarrow\ a_2 = -\frac{4}{\pi^2}$.

Explizite Berechnung des Fehlers:

$$|p(\pi/4) - f(\pi/4)| = 0,75 - 0,707106781 \approx 0,042893219$$

Aufgabe 14: Betrachten Sie die Kurve

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}.$$

Interpolieren Sie die beiden Funktionen $\gamma_1(t)$ und $\gamma_2(t)$ durch Polynome p_1 und p_2 mit den Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4.
Nun definieren wir die Kurve

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix}.$$

In welchen Punkten schneiden sich die beiden Kurven γ und p?
Ist p eine geschlossene Kurve?

LÖSUNG: Interpolation von $\cos(\frac{\pi}{2}t)$:

t_i	0	1	2	3	4
y_i	1	0	-1	0	1

$p_1(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_1(t) = 1 \cdot L_0(t) + (-1) \cdot L_2(t) + 1 \cdot L_4(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_0(t) &= \frac{(t-1)(t-2)(t-3)(t-4)}{(0-1)(0-2)(0-3)(0-4)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-3)(t-4)}{(2-0)(2-1)(2-3)(2-4)} \\ &= \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_4(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-3)}{(4-0)(4-1)(4-2)(4-3)} \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_1(t) &= L_0(t) - L_2(t) + L_4(t) \\ &= \frac{1}{24}(t^4 - 10t^3 + 35t^2 - 50t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) + \frac{1}{24}(t^4 - 6t^3 + 11t^2 - 6t) \\ &= \frac{1}{24}(2t^4 - 16t^3 + 46t^2 - 56t + 24) - \frac{1}{4}(t^4 - 8t^3 + 19t^2 - 12t) \\ &= -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \end{aligned}$$

Interpolation von $\sin(\frac{\pi}{2}t)$:

t_i	0	1	2	3	4
y_i	0	1	0	-1	0

$p_2(t)$ läßt sich schreiben als

$$p_2(t) = 1 \cdot L_1(t) + (-1) \cdot L_3(t),$$

wobei $L_i(t_j) = \delta_{ij}$.

$$\begin{aligned} L_1(t) &= \frac{(t-0)(t-2)(t-3)(t-4)}{(1-0)(1-2)(1-3)(1-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_3(t) &= \frac{(t-0)(t-1)(t-2)(t-4)}{(3-0)(3-1)(3-2)(3-4)} \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow p_2(t) &= L_1(t) - L_3(t) \\ &= -\frac{1}{6}(t^4 - 9t^3 + 26t^2 - 24t) + \frac{1}{6}(t^4 - 7t^3 + 14t^2 - 8t) \\ &= \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{aligned}$$

Da wir für die Berechnung von p die Stützstellen 0, 1, 2, 3 und 4 vorgegeben haben, schneiden sich die beiden Kurven $\gamma(t)$ und $p(t)$ in den Punkten

$$\gamma(0) = p(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(1) = p(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\gamma(2) = p(2) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma(3) = p(3) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{und } \gamma(4) = p(4) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$p(t)$ ist eine geschlossene Kurve, da $p(0) = p(4)$.

Aufgabe 15: Zeichnen Sie die beiden Kurven

$$\gamma : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad \gamma(t) = \begin{pmatrix} \gamma_1(t) \\ \gamma_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\frac{\pi}{2}t) \\ \sin(\frac{\pi}{2}t) \end{pmatrix}$$

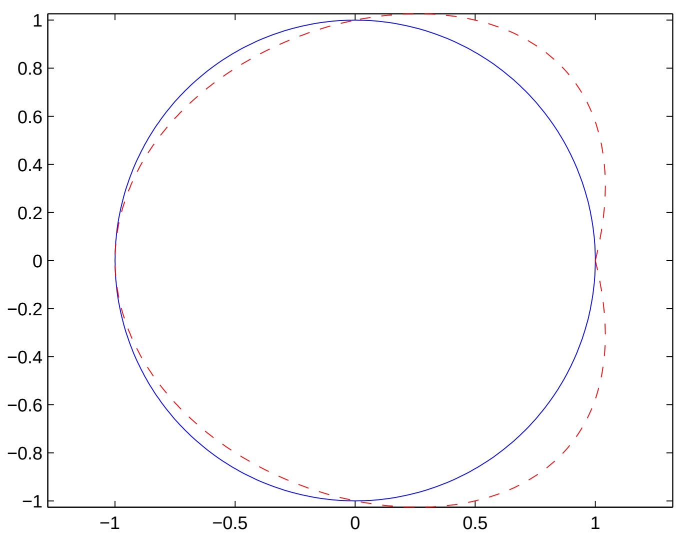
und

$$p : [0,4] \to \mathbb{R}^2, \quad p(t) = \begin{pmatrix} p_1(t) \\ p_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6}t^4 + \frac{4}{3}t^3 - \frac{17}{6}t^2 + \frac{2}{3}t + 1 \\ \frac{1}{3}(t^3 - 6t^2 + 8t) \end{pmatrix}$$

mit MATLAB.

Lösung:

```
function plotCurveIn2d
% plots two curves in 2d
y = 0:0.01:4;

x_1 = cos(pi*y*0.5);
x_2 = sin(pi*y*0.5);

plot(x_1,x_2)
axis equal

% damit zwei Ausgaben uebereinander gelegt werden koennen
hold on

% y.^4 bedeutet, dass komponentenweise y(i)^4 berechnet wird
z_1 = -1 * y.^4 / 6 + 4 * y.^3 / 3 - 17 * y.^2 / 6 + 2 * y/3 + 1;
z_2 = (y.^3 - 6 * y.^2+ 8 * y) / 3;

% mit 'r--' legt man fest, dass die zweite Ausgabe
% rot und gestrichelt dargestellt wird
plot(z_1,z_2,'r--')

hold off
```



Die Kurve $\gamma(t)$ ist in blau dargestellt und die Kurve $p(t)$ in rot und gestrichelt.