Aufgabe 16: Interpolieren Sie die Funktion

$$f(x, y) = \sin(\pi x)\sin(\pi y)$$

auf $[0,1]^2$ mittels bikubischer Polynome ($m = 2$, $n = 3$). Wählen Sie dazu geeignete Knoten und berechnen Sie nur die Lagrangepolynome, die Sie tatsächlich benötigen.

LÖSUNG: Wir wählen äquidistante Knoten (x, y) mit $x, y = 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1$ (d.h. Knoten mit gleichem abstand), so dass wir für die Interpolation die folgenden Werte vorschreiben:

	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1
0	0	0	0	0
$\frac{1}{3}$	0	0,75	0,75	0
$\frac{2}{3}$	0	0,75	0,75	0
1	0	0	0	0

Diese Tabelle ist so zu lesen, dass in der ersten Zeile die Werte für y stehen, in der ersten Spalte die Werte für x und in den restlichen Feldern die zugehörigen Werte $f(x, y)$.
Benötigt werden also die Lagrangepolynome
$L_{11}(x, y)$ (für das gilt $L_{11}(x, y) = 1$ für $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0),
$L_{12}(x, y)$ (für das gilt $L_{12}(x, y) = 1$ für $(x, y) = (\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0),
$L_{21}(x, y)$ (für das gilt $L_{21}(x, y) = 1$ für $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$, sonst 0) und
$L_{22}(x, y)$ (für das gilt $L_{22}(x, y) = 1$ für $(x, y) = (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$, sonst 0).

Am einfachsten lassen sich diese zweidimensionalen Lagrangepolynome berechnen, indem man die entsprechenden eindimensionalen Lagrangepolynome miteinander multipliziert. Also berechnen wir die Lagrangepolynome
$L_1(x)$ mit $L_1(x) = 1$ für $x = \frac{1}{3}$, Null sonst und
$L_2(x)$ mit $L_2(x) = 1$ für $x = \frac{2}{3}$ und Null sonst.

$$\begin{aligned} L_1(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{2}{3})(x-1)}{(\frac{1}{3}-0)(\frac{1}{3}-\frac{2}{3})(\frac{1}{3}-1)} \\ &= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2(x) &= \frac{(x-0)(x-\frac{1}{3})(x-1)}{(\frac{2}{3}-0)(\frac{2}{3}-\frac{1}{3})(\frac{2}{3}-1)} \\ &= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1) \end{aligned}$$

Daraus folgt

$$
\begin{aligned}
L_{11}(x,y) &= L_1(x)L_1(y)\\
&= \frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-2)(y-1)\\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-2)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{12}(x,y) &= L_{21}(x,y)\\
&= L_1(x)L_2(y)\\
&= -\frac{9}{2}x(3x-2)(x-1)\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1)\\
&= -20\frac{1}{4}x(3x-2)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
L_{22}(x,y) &= L_2(x)L_2(y)\\
&= -\frac{9}{2}x(3x-1)(x-1)\left[-\frac{9}{2}y(3y-1)(y-1)\right]\\
&= 20\frac{1}{4}x(3x-1)(x-1)y(3y-1)(y-1)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow p(x,y) &= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+L_{12}(x,y)+L_{21}(x,y)+L_{22}(x,y)]\\
&= 0{,}75\,[L_{11}(x,y)+2L_{12}(x,y)+L_{22}(x,y)]\\
&= 15\frac{3}{16}xy\,[(3x-2)(x-1)(3y-2)(y-1)\\
&\quad -2(3x-2)(x-1)(3y-1)(y-1)\\
&\quad +(3x-1)(x-1)(3y-1)(y-1)]\\
&= 15\frac{3}{16}xy(x-1)(y-1)\,[(3x-2)(3y-2)\\
&\quad -2(3x-2)(3y-1)+(3x-1)(3y-1)]
\end{aligned}
$$

Aufgabe 17: Gegeben sei ein Dreieck mit den Eckpunkten $a_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $a_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}$ und $a_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die baryzentrischen Koordinaten der Punkte $p_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4{,}6 \end{pmatrix}$ und $p_2 = \begin{pmatrix} 3{,}7 \\ 2{,}1 \end{pmatrix}$ bezüglich dieses Dreiecks. Liegen p_1 bzw. p_2 im Innern dieses Dreiecks?

LÖSUNG: Die baryzentrischen Koordinaten des Punktes p_i bezüglich des Dreiecks mit den Eckpunkten a_0, a_1 und a_2 kann man berechnen, indem man das folgende Gleichungssystem löst

$$
\begin{pmatrix} \vdots & \vdots \\ a_1 - a_0 & a_2 - a_0 \\ \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} = p_i - a_0
$$

und die nullte Komponente der baryzentrischen Koordinate wie folgt berechnet

$$\lambda_0 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2.$$

<u>p_1 in baryzentrischen Koordinaten:</u>

$$\begin{array}{rrcl} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}6 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \lambda_2 & = & 2{,}6 - 5\lambda_1 \\ & 3\lambda_1 + 5(2{,}6 - 5\lambda_1) & = & 2 \\ \Rightarrow & \lambda_1 & = & \frac{1}{2} \\ & \lambda_2 & = & 2{,}6 - 5 \cdot \frac{1}{2} = 0{,}1 \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 - 0{,}5 - 0{,}1 = 0{,}4$
d.h. p_1 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.4, 0.5, 0.1)$.
Der Punkt p_1 liegt im gegebenen Dreieck, da für λ_i mit $i = 0, 1, 2$ gilt $0 \leq \lambda_i \leq 1$.

<u>p_2 in baryzentrischen Koordinaten:</u>

$$\begin{array}{rrcl} & \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 2{,}7 \\ 0{,}1 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & \lambda_2 & = & 0{,}1 - 5\lambda_1 \\ & 3\lambda_1 + 5(0{,}1 - 5\lambda_1) & = & 2{,}7 \\ \Rightarrow & \lambda_1 & = & -0{,}1 \\ & \lambda_2 & = & 0{,}1 - 5(-0{,}1) = 0{,}6 \end{array}$$

$\Rightarrow \lambda_0 = 1 + 0{,}1 - 0{,}6 = 0{,}5$
d.h. p_2 sieht in baryzentrischen Koordinaten wie folgt aus: $(0.5, -0.1, 0.6)$.
Der Punkt p_2 liegt nicht im gegebenen Dreieck, da $\lambda_1 < 0$.