Aufgabe 22: Welche der folgenden Gleichungen sind richtig?

a) $e^{i\frac{\pi}{2}} = -i.$ ja ☐ nein ☐

b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = i.$ ja ☐ nein ☐

c) $e^{i\frac{\pi}{4}} = -\sqrt{i}.$ ja ☐ nein ☐

d) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt{i}.$ ja ☐ nein ☐

e) $e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\,(1+i).$ ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) Nein!

b) Ja!

c) Nein!

d) Ja!

e) Ja!

Begründung:
Die Eulersche Formel lautet: $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. Daraus ergibt sich:

$$e^{i\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 0 + i\cdot 1 = i\,,$$

wegen $\cos\frac{\pi}{2} = 0$ und $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.
Wegen

$$e^{i\left(-\frac{\pi}{2}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2} = 0 - i\cdot 1 = -i\,,$$

da $\cos(-x) = \cos x$ (cos ist gerade!) und $\sin(-x) = -\sin x$ (sin ist ungerade!), gilt also

a) Nein!

b) Ja!

Wegen $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$ gilt $e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)^{1/2} = \pm i^{\frac{1}{2}} = \pm\sqrt{i}$.
Die Eulersche Formel besagt:

$$e^{i\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\,.$$

$\dfrac{\pi}{4}$ entspricht einem Winkel von 45°.
Behauptung: $\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$.
Nachweis:

- $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \;\Rightarrow\; \cos\frac{\pi}{4} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\frac{\pi}{4}$.
- $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$ (folgt aus Additionstheorem für sin!)

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow\; 1 = \sin\frac{\pi}{2} = \sin\left(2\frac{\pi}{4}\right) = 2\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow\; \frac{1}{2} = \sin^2\frac{\pi}{4} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} = \cos\frac{\pi}{4} \\
&\Rightarrow\; \sin\frac{\pi}{4} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{wegen } \sin\frac{\pi}{4} > 0\,!
\end{aligned}$$

Also gilt:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\pi}{4}} &= \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

d.h. es gilt:

e) Ja!

Weiter gilt:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]^2 &= \frac{2}{4}(1+i)^2 = \frac{1}{2}(1+2i+i^2) \\
&= \frac{1}{2}(1+2i-1) = i\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\; \sqrt{i} &= \sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\,, \\
-\sqrt{i} &= -\sqrt{e^{i\frac{\pi}{2}}} = -e^{i\frac{\pi}{4}} = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(1+i)\,.
\end{aligned}$$

Also:

c) Nein!

d) Ja!

Aufgabe 23: Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$. Geben Sie die Lösungen in der Form $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$ an.

a) $z^3 = -8$

b) $z^2 = i$

c) $z^4 = -16$

d) $z = \frac{2+i}{2-i}$

Achtung: Berechnen Sie alle Lösungen!

LÖSUNG:

a) $z^3 = -8$ hat 3 Lösungen.

$$
\begin{array}{llllll}
z^3 = -8 = 8e^{i\pi} & & & = 8e^{3i\pi} & & = 8e^{5i\pi} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{3i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{5i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2e^{i\frac{\pi}{3}} & \text{oder} & z = 2e^{i\pi} & \text{oder} & z = 2e^{-i\frac{\pi}{3}} \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 2\left(\frac{1}{2} + i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 2\left(\frac{1}{2} - i\sqrt{\frac{3}{4}}\right) \\
\Leftrightarrow & z = 1 + i\sqrt{3} & \text{oder} & z = -2 & \text{oder} & z = 1 - i\sqrt{3}
\end{array}
$$

Alternativ: 1. Lösung ist klar: $\boxed{z_1 = -2}$: $(-2)^3 = -8$ ✓ Polynomdivision:

$$
\begin{array}{rcrcl}
(z^3 & + & 8) & : & (z+2) = z^2 - 2z + 4 \\
-(z^3 & + & 2z^2) & & \\
\hline
-2z^2 & + & 8 & & \\
-(-2z^2 & - & 4z) & & \\
\hline
 & & 4z & + & 8 \\
 & & -(4z & + & 8) \\
\hline
 & & & & 0
\end{array}
$$

Probe: $(z^2 - 2z + 4)(z + 2) = z^3 - 2z^2 + 4z + 2z^2 - 4z + 8 = z^3 + 8$ ✓

Berechnung der 2. und 3. Lösung:

$$
\begin{aligned}
z^2 - 2z + 4 = 0 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 - 2z + 1 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 + 3 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - 3i^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad (z-1)^2 - \left(\sqrt{3}i\right)^2 = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \left(z - 1 - i\sqrt{3}\right)\left(z - 1 + i\sqrt{3}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \quad \boxed{z_2 = 1 + i\sqrt{3}},\ \boxed{z_3 = 1 - i\sqrt{3}}
\end{aligned}
$$

Probe:

$$\begin{aligned}
\left(1+i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1+i\sqrt{3}\right)^2\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(1+2\sqrt{3}i-3\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2+2\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-\sqrt{3}i\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1-i^2\cdot 3\right) = (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark\\
\left(1-i\sqrt{3}\right)^3 &= \left(1-i\sqrt{3}\right)^2\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= \left(-2-2\sqrt{3}i\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)\left(1+i\sqrt{3}\right)\left(1-i\sqrt{3}\right)\\
&= (-2)(1+3)\\
&= -8 \quad \checkmark
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^2 = i \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i\frac{\pi}{2}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm e^{i\frac{\pi}{4}}\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)
\end{aligned}$$

c) $z^4 = -16$ hat 4 Lösungen:

Um die Gleichung $z^4 = -16$ zu lösen definieren wir $y := z^2$, so dass die erste Gleichung äquivalent ist zu $y^2 = -16$. Nun lösen wir als erstes die Gleichung $y^2 = -16$ nach y auf.

$$y^2 = -16 \quad \Leftrightarrow \quad y = \pm 4i$$

Also müssen wir noch die zwei Gleichungen $z^2 = 4i$ und $z^2 = -4i$ lösen und nutzen dafür das Ergebnis aus dem vorherigen Aufgabenteil.

$$\begin{aligned}
z^2 = 4i \quad &\Leftrightarrow \quad \left(\frac{z}{2}\right)^2 = i\\
&\Leftrightarrow \quad \frac{z}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}(1+i)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
z^2 = -4i \quad &\Leftrightarrow \quad -\frac{z^2}{4} = i \\
&\Leftrightarrow \quad \left(\frac{zi}{2}\right)^2 = i \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{zi}{2} = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad zi = \pm\sqrt{2}(1+i) \\
&\Leftrightarrow \quad z = \pm\sqrt{2}i(1+i) = \pm\sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}
$$

Die vier Lösungen sind also

$$
\begin{aligned}
z_1 &= \sqrt{2}(1+i) \\
z_2 &= -\sqrt{2}(1+i) \\
z_3 &= \sqrt{2}(1-i) \\
z_4 &= \sqrt{2}(i-1)
\end{aligned}
$$

d) Mittels der Berechnung des multiplikativen Inversen:

$$
\begin{aligned}
(2-i)^{-1} &= \frac{1}{2^2+1^2}(2+i) = \frac{1}{5}(2+i) \\
(2+1)(2-i)^{-1} &= \frac{1}{5}(2+i)(2+i) = \frac{1}{5}(4+4i-1) = \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i
\end{aligned}
$$

Alternativ:

$$
\begin{aligned}
\frac{2+i}{2-i} &= \frac{(2+i)(2+i)}{(2-i)(2+i)} = \frac{4+4i-1}{4-i^2} = \frac{3+4i}{5} \\
&= \frac{3}{5}+\frac{4}{5}i\,.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 24: Skizzieren Sie die Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1 \qquad \text{für} \qquad k = 2, 4, 8$$

in $\mathbb{C}$. Wie sehen alle Lösungen der Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

in $\mathbb{C}$ aus?

LÖSUNG: Lösungen der Gleichung $z^2 = 1$ in $\mathbb{C}$:

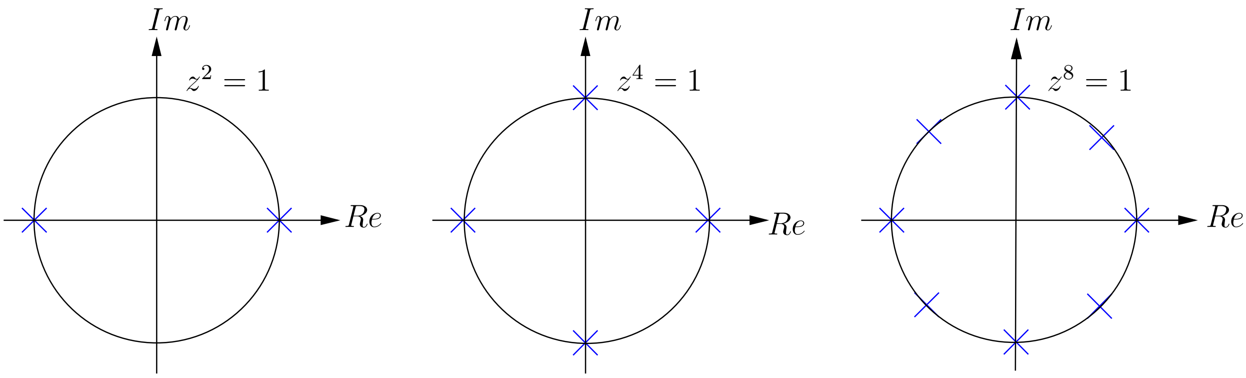
$$
\begin{aligned}
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i0} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^2 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^2 = e^{i2\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1
\end{aligned}
$$

Lösungen der Gleichung $z^4 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i0} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i0} = 1 \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i2\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{\pi}{2}} = i \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i4\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\pi} = -1 \\
z^4 = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad z^4 = e^{i6\pi} \quad \Rightarrow \quad z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i
\end{aligned}
$$

Lösungen der Gleichung $z^8 = 1$ in $\mathbb{C}$:

$$\begin{array}{lllll}
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i0} & \Rightarrow & z = e^{i0} = 1 \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i2\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i4\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{1}{2}\pi} = i \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i6\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{3}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i8\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\pi} = -1 \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i10\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{5}{4}\pi} = -\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}} \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i12\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{3}{2}\pi} = -i \\
z^8 = 1 & \Leftrightarrow & z^8 = e^{i14\pi} & \Rightarrow & z = e^{i\frac{7}{4}\pi} = \frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}
\end{array}$$



Eine Lösungen der allgemeinen Gleichung

$$z^k = 1, \quad k \in \mathbb{N}$$

ist immer $z = 1$. Die restlichen $k - 1$ Lösungen liegen gleichmäßig verteilt auf dem Einheitskreis:

$$z = e^{2\pi i \frac{l}{k}} \text{ für } l = 0, 1, \ldots k - 1.$$

Die Lösungen von $z^{2k} = 1$ sind die k Lösungen der Gleichung $z^k = 1$ und k weitere Lösungen.

Aufgabe 25: Beweisen Sie: Bei einem Polynom mit reellen Koeffizienten treten echt komplexe Nullstellen immer als konjugierte Paare auf, d.h. falls $p(z) = 0$ dann auch $p(\overline{z}) = 0$.
Tipp: Beweisen Sie $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$ und folgern Sie daraus die Behauptung. Was ist $\overline{r}$ für $r \in \mathbb{R}$?

Lösung: Sei $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ ein beliebiges Polynom mit $a_i \in \mathbb{R}$.

Zuerst beweisen wir, $p(\overline{z}) = \overline{p(z)}$:

$$\begin{aligned} p(\overline{z}) &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z}^i \\ &= \sum_{i=0}^{n} a_i \overline{z^i} \\ &= \sum_{i=0}^{n} \overline{a_i z^i} \qquad \text{da } a_i = \overline{a_i} \text{ für } a_i \in \mathbb{R} \\ &= \overline{\sum_{i=0}^{n} a_i z^i} \\ &= \overline{p(z)} \end{aligned}$$

Sei nun z eine Nullstelle des Polynoms $p(z)$, dann gilt $p(z) = 0$. Da $0 \in \mathbb{R}$ gilt $0 = \overline{0}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad \overline{p(z)} &= 0 \\ \Leftrightarrow \quad p(\overline{z}) &= 0 \end{aligned}$$