Aufgabe 26: Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren von

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -3/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie einen Zusammenhang zwischen den Eigenwerten und Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^{-1}$.

Lösung: (I) Bestimmung der Eigenwerte von $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -\lambda & 2 \\ 2 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= -\lambda(3-\lambda) - 4 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 3\lambda - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\lambda - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{9}{4} - 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow \qquad \lambda &= \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}} \\ &= \frac{3}{2} \pm \frac{5}{2} \end{aligned}$$

Also sind $\lambda_1 = -1$ und $\lambda_2 = 4$ die Eigenwerte von $\mathbf{A}$.
(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I} = \mathbf{A} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow x + 2y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2y = -2\,.$$

Also ist $\operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe:}\ \mathbf{A}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = (-1)\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

b) Für $\lambda_2 = 4$ gilt:

$$\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I} = \mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -4x + 2y = 0 \Leftrightarrow -2x + y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\ .$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = 4$ von $\mathbf{A}$.

$$\text{Probe: } \mathbf{A} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\ .$$

(III) Es sei

$$\mathbf{B} := \mathbf{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{B}$ lautet: $\lambda^2 + \frac{3}{4}\lambda - \frac{1}{4} = 0$ (siehe (I)!).

$$\Leftrightarrow (\lambda + 1)(\lambda - \frac{1}{4}) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = \frac{1}{4}\ .$$

Offensichtlich gilt: $\lambda_1^B = \frac{1}{\lambda_1^A}$ und $\lambda_2^B = \frac{1}{\lambda_2^A}$ ($-1 = -1$ und $\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$).
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$!
Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:
a) Für $\lambda_1 = -1$ gilt:

$$\mathbf{B} + \mathbf{I} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}x + y = 0 \quad \text{mit} \quad y = 1 \Rightarrow x = -2.$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_1 = -1$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
b) Für $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ gilt:

$$\mathbf{B} - \frac{1}{4}\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix}\ .$$

$$\begin{pmatrix} -1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -x + \frac{1}{2}y = 0 \quad \text{mit} \quad x = 1 \Rightarrow y = 2\ .$$

Also ist span $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ auch die Menge aller Eigenvektoren zu $\lambda_2 = \frac{1}{4}$ von $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$.
Fazit: Die Eigenwerte von $\mathbf{A}^{-1}$ sind die Kehrwerte der Eigenwerte von $\mathbf{A}$ und die zugehörigen Eigenvektoren sind gleich. D.h. wenn λ_1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ ist und $\frac{1}{\lambda_1}$ folglich ein Eigenwert von $\mathbf{A}^{-1}$, so sind die Eigenvektoren der beiden Matrizen zu diesen Eigenwerten gleich.

Aufgabe 27: Geben Sie die zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

gehörende Diagonalmatrix D, d.h. $A = UDU^T$ mit $U^T = U^{-1}$ an. Berechnen Sie die Spur und die Determinante von A und D sowie die Eigenvektoren der Matrix A.

LÖSUNG: Die zu A gehörende Diagonalmatrix hat auf der Diagonalen genau die Eigenwerte von A. Diese bestimmen wir mit dem charakteristischen Polynom:

$$\begin{aligned}
\det(A - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\
&= (1-\lambda)(3-\lambda)^2 - (1-\lambda) \\
&= (1-\lambda)(9 - 6\lambda + \lambda^2 - 1) \\
&= (1-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 8) \\
&= (1-\lambda)(\lambda-2)(\lambda-4) = 0
\end{aligned}$$

Also ist die zu A gehörende Diagonalmatrix $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

$$\det \mathbf{A} = 1 \cdot 3 \cdot 3 + 0 + 0 - 0 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 0 = 8$$

$$\det \mathbf{D} = 1 \cdot 2 \cdot 4 = 8 = \det \mathbf{A}$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{A} = 1 + 3 + 3 = 7$$

$$\operatorname{tr} \mathbf{D} = 1 + 2 + 4 = 7 = \operatorname{tr} \mathbf{A}$$

Eigenvektoren der Matrix A:

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 1: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 2: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Menge der Eigenvektoren zum Eigenwert 4: $\left\{ \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

Aufgabe 28: Diagonalisieren Sie die Matrix

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 13 & 4 & -2 \\ 4 & 13 & -2 \\ -2 & -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Tipps: Die Eigenwerte von A sind ganzzahlig.
Achten Sie darauf, dass die Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen müssen.

LÖSUNG: **Berechnung der Eigenwerte:**

$$
\begin{aligned}
P(\lambda) &= \det \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13-9\lambda & 4 & -2 \\ 4 & 13-9\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 10-9\lambda \end{pmatrix} \\
&= 9^{-3}((13-9\lambda)^2(10-9\lambda)+16+16-4(13-9\lambda)-4(13-9\lambda)-16(10-9\lambda)) \\
&= 9^{-3}((169-234\lambda+81\lambda^2)(10-9\lambda)+32-104+72\lambda-160+144\lambda) \\
&= 9^{-3}(1690-2340\lambda+810\lambda^2-1521\lambda+2106\lambda^2-729\lambda^3-232+216\lambda) \\
&= 2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3
\end{aligned}
$$

Aus dem Tipp wissen wir, dass die Matrix A ganzzahlige Eigenwerte hat. Folglich raten wir den ersten Eigenwert $\lambda_1 = 1$ und testen

$$P(1) = 2-5+4-1 = 0$$

Polynomdivision ergibt

$$(2-5\lambda+4\lambda^2-\lambda^3) : (\lambda-1) = -\lambda^2+3\lambda-2$$

$$
\begin{array}{rrcl}
 & -\lambda^2+3\lambda-2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda^2-3\lambda+2 & = & 0 \\
\Leftrightarrow & \lambda & = & \frac{3}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4}} \\
 & & = & 1 \text{ oder } 2
\end{array}
$$

Die Eigenwerte der Matrix A sind also $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

Bestimmung der Eigenvektoren:
Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$:

$$
\begin{array}{rrcll}
 & (A-2\mathbb{1})x & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & (9A-18\mathbb{1})x & = & 0 & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -5 & 4 & -2 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & -2 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & -\frac{9}{5} & -\frac{18}{5} \\ 0 & -\frac{18}{5} & -\frac{36}{5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} -\frac{1}{5}I = I' \\ \frac{4}{5}I + II = II' \\ -\frac{2}{5}I + III = III' \end{array} \\
\Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & -\frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{l} \\ -\frac{5}{9}II' \\ -2II' + III' \end{array} \\
\Rightarrow & x_2 & = & -2x_3 & \\
 & x_1 & = & \frac{4}{5}x_2 - \frac{2}{5}x_3 & \\
 & & = & -\frac{8}{5}x_3 - \frac{2}{5}x_3 & \\
 & & = & -2x_3 &
\end{array}
$$

Mit $x_3 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_3 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

Berechnung der Eigenvektoren zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$:

$$\begin{array}{rrcl} & (A - \mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & (9A - 9\mathbb{1})x & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 4 & 4 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Alle Zeilen sind äquivalent

$$\Rightarrow 2x_1 + 2x_2 - x_3 = 0$$

Der Eigenraum zum Eigenwert $\lambda_1 = \lambda_2$ ist also die Ebene durch den Ursprung, die durch diese Gleichung gegeben ist. Man kann sie auch folgendermaßen schreiben:

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 2(x_1 + x_2) \end{pmatrix} \middle| x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

Wir suchen nun als Eigenvektoren zwei zueinander senkrechte (und normierte) Richtungsvektoren in dieser Ebene.

Wir wählen als ersten z.B. den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$ (man kann natürlich einen beliebigen Nicht-Null-Vektor in der Ebene wählen, dieser hat aber eine besonders rechenfreundliche Länge) und normieren ihn, so dass wir den Vektor

$$v_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

erhalten. Als zweiten Eigenvektor suchen wir einen Vektor aus demselben Eigenraum, der senkrecht auf v_1 steht, das heißt folgende zwei Gleichungen erfüllt

$$\begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 & = & 0 \end{array}$$

Die erste Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor senkrecht auf v_1 steht und die zweite Gleichung sorgt dafür, dass der neue Vektor im selben Eigenraum liegt. Addition beider Gleichungen ergibt

$$3x_1 - 3x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = x_3$$

und wenn man dies in die erste Gleichung einsetzt erhält man

$$x_1 = -2x_2.$$

Mit $x_2 = 1$ erhalten wir also den Vektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und normiert

$$v_2 = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Da die Vektoren v_1, v_2 und v_3 senkrecht auf einander stehen ($v_1 \cdot v_3 = 0$ und $v_2 \cdot v_3 = 0$) und normiert sind, ist die Matrix

$$U = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

eine orthogonale Matrix.

$$U^T A U = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 29: Zeigen Sie, dass die Fläche mit der Darstellung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ein Ellipsoid ist und bestimmen Sie dessen Hauptachsen.

LÖSUNG: Die Gleichung

$$2x^2 + \frac{7}{3}y^2 + \frac{5}{3}z^2 + \frac{4}{3}xy - \frac{4}{3}xz = 1$$

ist äquivalent zu der Gleichung

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = 1,$$

wobei $\mathbf{A}$ folgende symmetrische 3×3-Matrix sei

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{7}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

und $\mathbf{x}$ den Vektor $\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ bezeichnet. Es gilt nämlich

$$\mathbf{Ax} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6x + 2y - 2z \\ 2x + 7y \\ -2x + 5z \end{pmatrix}$$

und

$$\langle \mathbf{Ax}, \mathbf{x} \rangle = \frac{1}{3}[6x^2+2xy-2xz+2xy+7y^2-2xz+5z^2] = 2x^2+\frac{7}{3}y^2+\frac{5}{3}z^2+\frac{4}{3}xy-\frac{4}{3}xz,$$

woraus obige Behauptung folgt. Um die Hauptachsen dieser Fläche zu bestimmen führen wir eine Hauptachsentransformation durch. Dazu bestimmen wir zuerst die Eigenwerte der Matrix $\mathbf{A}$. Die charakteristische Gleichung von $\mathbf{A}$ lautet

$$\begin{aligned} 0 = \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= (2-\lambda)(\frac{7}{3}-\lambda)(\frac{5}{3}-\lambda) - \frac{4}{9}(\frac{7}{3}-\lambda) - (\frac{5}{3}-\lambda)\frac{4}{9} \\ &= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + \frac{35}{9}) - \frac{28}{27} + \frac{4}{9}\lambda - \frac{20}{27} + \frac{4}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 4\lambda^2 - \frac{35}{9}\lambda + 2\lambda^2 - 8\lambda + \frac{70}{9} - \frac{48}{27} + \frac{8}{9}\lambda \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 + (-\frac{35}{9} + \frac{8}{9} - 8)\lambda + \frac{54}{9} \\ &= -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 11\lambda + 6. \end{aligned}$$

Durch Probieren erhält man, dass $\lambda = 1$ eine Lösung der Gleichung $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = 0$, da $1 - 6 + 11 - 6 = 0$. Durch Polynomdivision oder mit Hilfe des Horner-Schemas erhält man dann

$$0 = \lambda^3 - 6\lambda^2 + 11\lambda - 6 = (\lambda-1)(\lambda^2 - 5\lambda + 6) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda-3).$$

D. h. die Eigenwerte von $\mathbf{A}$ sind

$$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3.$$

Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren: Für $\lambda_1 = 1$ erhält man:

$$\mathbf{A} - \mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{4}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} 3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +4y & & = 0 \\ -2x & & +2z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = -2y \quad \Leftrightarrow \quad y = -\frac{1}{2}x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = z \quad \Leftrightarrow \quad z = x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = 1$.
Für $\lambda_2 = 2$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & +y & & = 0 \\ -2x & & -z & = 0 \end{array}$$

Aus der ersten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow y = z \quad \Leftrightarrow \quad z = y$$

und aus der zweiten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow y = -2x \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{1}{2}y.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die dritte Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_2 = 2$.
Für $\lambda_3 = 3$ erhält man:

$$\mathbf{A} - 3\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 0 & -\frac{4}{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\ \Leftrightarrow \quad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -3 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{array}{rrrl} -3x & +2y & -2z & = 0 \\ 2x & -2y & & = 0 \\ -2x & & -4z & = 0 \end{array}$$

Aus der zweiten Zeile dieses Gleichungssystems folgt

$$\Rightarrow x = y \quad \Leftrightarrow \quad y = x$$

und aus der dritten Zeile ergibt sich

$$\Rightarrow x = -2z \quad \Leftrightarrow \quad z = -\frac{1}{2}x.$$

Einsetzen dieser beiden Gleichungen in die erste Zeile zeigt, dass diese ebenfalls erfüllt ist.

$$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

ist normierter Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 3$.
Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle &= \frac{1}{9}(-2-2+4) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(4-2-2) = 0, \\ \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle &= \frac{1}{9}(-2+4-2) = 0. \end{aligned}$$

D. h. die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ bilden eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ und die Matrix

$$\mathbf{V} := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

ist eine orthogonale Matrix, d. h. es gilt $\mathbf{V}\mathbf{V}^T = \mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{I}$ mit

$$\mathbf{V}^T := \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{V}$$

wie man leicht nachrechnet. Es folgt

$$\mathbf{AV} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{aligned} \mathbf{V}^T\mathbf{AV} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix} \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 6 & -6 & 18 \\ -3 & 12 & 18 \\ 6 & 12 & -9 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{27}\begin{pmatrix} 27 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 0 \\ 0 & 0 & 81 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} =: \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Also gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbf{A} &= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 2 & 7 & 0 \\ -2 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T \\
&= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Setzen wir nun

$$
\mathbf{y} := \mathbf{V}^T\mathbf{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2x - y + 2z \\ -x + 2y + 2z \\ 2x + 2y - z \end{pmatrix},
$$

so folgt

$$
\langle \mathbf{D}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{x}, \mathbf{V}^T\mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{V}\mathbf{D}\mathbf{V}^T\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1.
$$

Da die Eigenwerte $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$ alle positiv sind, ist die durch

$$
\langle \mathbf{D}\mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{A}\mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = 1
$$

definierte Fläche ein Ellipsoid mit den Hauptachsen $1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{3}}$.