Aufgabe 30: Berechnen Sie die Eigenwerte der Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

und $B = A - 4\,\mathbb{1}$.

LÖSUNG:

$$\begin{aligned} P_1(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 3-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 - (1-\lambda) - (1-\lambda) - (3-\lambda) \\ &= (1 - 2\lambda + \lambda^2)(3-\lambda) - 3 + 3\lambda \\ &= 3 - 7\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 - 3 + 3\lambda \\ &= -4\lambda + 5\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & & P_1(\lambda) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda^3 + 5\lambda^2 - 4\lambda &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda\,(\lambda^2 - 5\lambda + 4) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda\left[\left(\lambda - \tfrac{5}{2}\right)^2 - \tfrac{9}{4}\right] &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } \tfrac{5}{2} - \sqrt{\tfrac{9}{4}} \text{ oder } \tfrac{5}{2} + \sqrt{\tfrac{9}{4}} \\ &\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } 1 \text{ oder } 4 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix A lauten also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 4$.
Nun berechnen wir die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$:

$$\begin{aligned} P_2(\lambda) = \det(B - \lambda\mathbb{1}) &= \det \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 & -1 \\ -1 & -3-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (-3-\lambda)^2\,(-1-\lambda) + 1 + 1 - (-3-\lambda) - (-3-\lambda) - (-1-\lambda) \\ &= \left(9 + 6\lambda + \lambda^2\right)(-1-\lambda) + 9 + 3\lambda \\ &= -9 - 6\lambda - \lambda^2 - 9\lambda - 6\lambda^2 - \lambda^3 + 9 + 3\lambda \\ &= -12\lambda - 7\lambda^2 - \lambda^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & & P_2(\lambda) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda\,(\lambda^2 + 7\lambda + 12) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{49}{4} + \tfrac{48}{4}\right) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & -\lambda\left(\left(\lambda + \tfrac{7}{2}\right)^2 - \tfrac{1}{4}\right) &= 0 \\ &\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } -\tfrac{7}{2} - \sqrt{\tfrac{1}{4}} \text{ oder } -\tfrac{7}{2} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} \\ &\Leftrightarrow & \lambda &= 0 \text{ oder } -4 \text{ oder } -3 \end{aligned}$$

Die Eigenwerte der Matrix $B = A - 4\mathbb{1}$ sind also $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -4$ und $\lambda_3 = -3$.
Die Eigenwerte der Matrix $A - 4\mathbb{1}$ erhält man also, indem man die Eigenwerte der Matrix A nimmt und jeweils 4 subtrahiert.

Aufgabe 31: Bestimmen Sie zur Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}$$

eine Matrix $\mathbf{P}$ so, dass $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP}$ eine Diagonalmatrix ist.
Tipp: Wenn die Spalten von $\mathbf{P}$ Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ sind, so gilt wie bei symmetrischen Matrizen $\mathbf{AP} = \mathbf{PD}$, wobei $\mathbf{D}$ eine Diagonalmatrix aus den entsprechenden Eigenwerten von $\mathbf{A}$ ist. Man muss also geeignet viele linear unabhängige Eigenvektoren finden, so dass $\mathbf{P}$ invertierbar ist.
Probieren Sie die Teiler des konstanten Gliedes um die erste Nullstelle des charakteristischen Polynoms zu bestimmen.

LÖSUNG: (I) **Bestimmung der Eigenwerte:**

$$\begin{aligned} P(\lambda) = \det(A - \lambda\mathbb{1}) &= \det\begin{pmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ 3 & -5-\lambda & 3 \\ 6 & -6 & 4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)(-5-\lambda)(4-\lambda) - 54 - 54 - 18(-5-\lambda) + 18(1-\lambda) + 9(4-\lambda) \\ &= (-5+4\lambda+\lambda^2)(4-\lambda) - 108 + 90 + 18\lambda + 18 - 18\lambda + 36 - 9\lambda \\ &= -20 + 16\lambda + 4\lambda^2 + 5\lambda - 4\lambda^2 - \lambda^3 + 36 - 9\lambda \\ &= 16 + 12\lambda - \lambda^3 \end{aligned}$$

Als Nullstelle des Charakteristischen Polynoms raten wir $\lambda = 4$ und testen

$$P(4) = -64 + 48 + 16 = 0.$$

Mit Hilfe der Polynomdivision oder des Horner-Schemas erhält man daraus

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 12\lambda + 16 = (\lambda-4)(-\lambda^2 - 4\lambda - 4) = (\lambda-4)(-1)(\lambda+2)^2.$$

Die zugehörigen Eigenwerte sind also

$$\lambda_1 = -2,\ \lambda_2 = -2,\ \lambda_3 = 4.$$

(II) **Bestimmung der zugehörigen Eigenvektoren:**
Für $\lambda_1 = -2$ erhält man:

$$\mathbf{A} + 2\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}+2\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & 3 \\ 6 & -6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0 \quad \Leftrightarrow x_2 = x_1 + x_3. &
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ bzw. $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind Eigenvektoren von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_1 = -2 = \lambda_2$.
Man sieht leicht ein (oder rechnet dies schnell nach), dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear unabhängig sind.
Entsprechend gilt für $\lambda_3 = 4$:

$$\mathbf{A} - 4\mathbf{I} = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}-4\mathbf{I})\mathbf{x} &= \mathbf{0} \\
\Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 & -3 & 3 \\ 3 & -9 & 3 \\ 6 & -6 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_1 - 3x_2 + x_3 = 0. & \\
\Leftrightarrow x_1 = x_2 \text{ und } x_3 = 2x_2. &
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor von $\mathbf{A}$ zum Eigenwert $\lambda_3 = 4$.
Wir behaupten, dass die Vektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ linear unabhängig sind. Dazu betrachten wir

$$\lambda \mathbf{v}_1 + \mu \mathbf{v}_2 + \nu \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

bzw. äquivalent dazu

$$\begin{aligned}
\lambda + \nu &= 0 \\
\lambda + \mu + \nu &= 0 \\
\mu + 2\nu &= 0.
\end{aligned}$$

Aus erster und zweiter Zeile folgt $\mu = 0$, mit der dritten Zeile folgt $\nu = 0$ und damit aus der ersten Zeile $\lambda = 0$. Dies war zu zeigen.

$$\Rightarrow \quad \mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

ist also invertierbar, da die Spalten linear unabhängig sind.

Damit ist $\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} = \mathbf{D}$, wir berechnen also noch $\mathbf{P}^{-1}$:

$$
\begin{array}{ccc|ccc}
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 1 \\
\hline
1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\
0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

und erhalten:

$$
\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
$$

Schließlich rechnen wir nach:

$$
\mathbf{AP} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix},
$$

$$
\begin{aligned}
\mathbf{P}^{-1}\mathbf{AP} &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 & 0 & 4 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

Aufgabe 32: Welche Aussagen sind richtig?

a) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n linear unabhängige Eigenvektoren. ja ☐ nein ☐

b) Jede diagonalisierbare $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

c) Jede symmetrische $n \times n$ Matrix hat n verschiedene Eigenwerte. ja ☐ nein ☐

d) Jede symmetrische Matrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

e) Jede 2×2 Spiegelungsmatrix ist diagonalisierbar. ja ☐ nein ☐

LÖSUNG:

a) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

b) **Nein!** Gegenbeispiel: $n \times n$ Einheitsmatrix

$$\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Der Eigenwert $\lambda = 1$ ist n-facher Eigenwert:

$$\det(\mathbf{I} - \lambda \mathbf{I}) = \det((1-\lambda)\mathbf{I}) = (1-\lambda)^n \det \mathbf{I} = (1-\lambda)^n \,.$$

c) **Nein!** Siehe b)! Die $n \times n$ Einheitsmatrix $\mathbf{I}$ ist symmetrisch!

d) **Ja!** Siehe Skript bzw. Vorlesung.

e) **Ja!** Eine 2×2 Spiegelungsmatrix ist symmetrisch. Siehe auch Skript bzw. Vorlesung.

Aufgabe 33: Gegeben ist das Skalarprodukt

$$g(v, w) = \int_0^{2\pi} v(x) w(x) \, dx$$

auf dem Raum der stetigen Funktionen auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

a) Man zeige, dass die Funktionen 1, $\cos(x)$ und $\cos(2x)$ richtig skaliert ein ON-System bilden. Was ist die Skalierung?
Tipp: $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$

b) Betrachten Sie die Funktion $f(x) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)$. Stellen Sie die Funktion in Termen der obigen Basis dar und berechnen Sie mit Hilfe der Orthonormalität $\|f\|_g^2 = g(f, f)$.

LÖSUNG:

a) Da die Skalierung nichts daran ändert, ob die Funktionen orthogonal ist, oder nicht, prüfen wir erst die Orthogonalität nach.

$$\begin{aligned} g(1, \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x) \, dx \\ &= \sin(x)\Big|_0^{2\pi} \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(1, \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(2x)\,dx \\
&\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos(z)\frac{1}{2}\,dz \\
&= \frac{1}{2}\sin(z)\Big|_0^{4\pi} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\cos(x), \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos(2x)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\left(\cos^2(x) - \sin^2(x)\right)\,dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\cos^2(x)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \sin(x)\cos^2(x)\Big|_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} \sin(x)2\cos(x)\left(-\sin(x)\right)\,dx - \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x) \\
&= \int_0^{2\pi} \cos(x)\sin^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{3}\sin^3(x)\Big|_0^{2\pi} \\
&= 0,
\end{aligned}
$$

denn

$$
\begin{aligned}
\int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - \int \sin(x)2\sin(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \sin^3(x) - 2\int_0^{2\pi} \sin^2(x)\cos(x)\,dx \\
\Leftrightarrow \int \cos(x)\sin^2(x)\,dx &= \frac{1}{3}\sin^3(x)
\end{aligned}
$$

(Alternativ Substitution $z = \sin x$.)

Da wir nun wissen, dass alle drei Funktionen orthogonal zueinander sind, berechnen wir die Skalierung, um sie zur normieren.

$$
\begin{aligned}
g(1,1) &= \int_0^{2\pi} 1\,dx \\
&= x\Big|_0^{2\pi} \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}, \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\right) = 1$$

$$\begin{array}{rlcl}
 & \int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) - \int -\sin(x)\sin(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) + \int \sin^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & \overset{\sin^2(x)+\cos^2(x)=1}{=} & \cos(x)\sin(x) + \int 1-\cos^2(x)\,dx \\
\Leftrightarrow & 2\int \cos^2(x)\,dx & = & \cos(x)\sin(x) + x \\
\Leftrightarrow & \int \cos^2(x)\,dx & = & \tfrac{1}{2}\,(x + \cos(x)\sin(x))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \quad g(\cos(x), \cos(x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\,(2\pi + \cos(2\pi)\sin(2\pi)) \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}\right) = 1$$

$$\begin{aligned}
g(\cos(2x), \cos(2x)) &= \int_0^{2\pi} \cos^2(2x)\,dx \\
&\overset{z:=2x}{=} \int_0^{4\pi} \cos^2(z)\frac{1}{2}\,dz \\
&= \frac{1}{4}\,(x + \cos(x)\sin(x))\Big|_0^{4\pi} \\
&= \pi
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad g\left(\tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}, \tfrac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}\right) = 1$$

Die Funktionen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ bilden also ein ON-System.

b) Mit $\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, $\varphi_1(x) = \frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}}$ und $\varphi_2(x) = \frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}}$ sowie $a_0 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}$, $a_1 = 0$ und $a_2 = \frac{4}{3\sqrt{\pi}}$ gilt

$$\begin{aligned}
f(x) &= a_0\,\varphi_0(x) + a_1\,\varphi_1(x) + a_2\,\varphi_2(x) \\
&= \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + 0\frac{\cos(x)}{\sqrt{\pi}} + \frac{4}{3\sqrt{\pi}}\frac{\cos(2x)}{\sqrt{\pi}} \\
&= \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{3}\right)
\end{aligned}$$

und damit

$$
\begin{aligned}
\|f\|_g^2 = g(f,f) &= g\left(\sum_{i=0}^{2} a_i\,\varphi_i(x), \sum_{j=0}^{2} a_j\,\varphi_j(x)\right) \\
\text{(bilinear)} \qquad &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{2} a_i\,a_j\,\underbrace{g(\varphi_i(x),\varphi_j(x))}_{=1 \text{ für } i=j,\ 0 \text{ sonst}} \\
\text{(ON Eigenschaft)} \qquad &= \sum_{i=0}^{2} a_i^2 \\
&= \left(\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}}\right)^2 + 0^2 + \left(\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\right)^2 = \frac{8}{\pi} + \frac{16}{9\pi}
\end{aligned}
$$

Bemerkungen:

- Das Ergebnis zur Berechnung der induzierten Norm $\|f\|_g$ ist in sofern interessant, als dass die über ein Integral definierte Norm einer kontinuierlichen Funktion mit der euklidischen Norm des diskreten Koeffizientenvektors $a = (a_0, a_1, a_2)$ übereinstimmt, kurz: $\|f\|_g = \|a\|$.
- Die Komposition von Sinus- und Kosinusfunktionen mit Vielfachen einer Grundfrequenz wird i. A. auch *Fourier-Reihe* genannt. Geeignete Funktionen können durch eine solche Reihe trigonometrischer Polynome beliebig gut approximiert werden. Im vorliegenden Fall handelt es sich um die ersten beiden Summanden der Reihe

  $$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2kx)}{(2k)^2-1},$$

  die die Funktion $|\sin(x)|$ approximiert.