Übungen zur Ingenieur-Mathematik II **SS 2014**
Blatt 11 **24.06.2014**

Aufgabe 38: Welche der folgenden Aussagen sind richtig für die Differentialgleichung

$$\dot{y} = y^2\,?$$

a) Durch die Vorgabe $y(a) = b$ ist eine Lösung lokal eindeutig bestimmt. ja ☐ nein ☐

b) Die Lösung zu der Vorgabe $y(0) = 1$ existiert für alle t. ja ☐ nein ☐

c) Die rechte Seite $f(y) = y^2$ genügt einer globalen Lipschitz-Bedingung in $\mathbb{R}^2$. ja ☐ nein ☐

d) Die rechte Seite $f(y) = y^2$ genügt einer Lipschitz-Bedingung für $|y| < a$, mit festem $a > 0$. ja ☐ nein ☐

Lösung:

a) Ja, denn lokal ist die Lipschitzbedingung für die rechte Seite erfüllt (siehe dazu d)!).

b) Nein, denn $y(t) = \frac{1}{1-t}$ ist (lokal) eindeutige Lösung der Differentialgleichung mit $y(0) = 1$, aber $\frac{1}{1-t} \to +\infty$ für $t \uparrow 1$. Die Lösung der Differentialgleichung kann man mit Separation der Variablen berechnen.

c) Nein, denn $|f(y) - f(0)| = y^2 = |y| \cdot |y - 0|$ und $|y|$ kann beliebig groß werden.

d) Ja. Da f stetig differenzierbar bzgl. y ist und, da:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(y) = 2\,y \quad \Rightarrow \left|\frac{\partial f}{\partial y}\,(y)\right| \le 2\,a \quad \text{für } \; y \text{ mit } |y| < a$$

gilt, ergibt sich die Lipschitzbedingung mit dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung bzw. wegen

$$f(y_1) - f(y_2) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial y}(y_2 + t\,(y_1 - y_2))\,dy\;.$$

Aufgabe 39: Lösen Sie das Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ \dot{y}_2(t) &= y_1(t) + y_2(t) \end{aligned}$$

mit Anfangswerten $y_1(0) = y_2(0) = 1$ mit Hilfe von Diagonalisierung.

Lösung: Das Differentialgleichungssystem läßt sich wie folgt umschreiben:

$$\dot{y}(t) = \begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = Ay(t)$$

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung eines solchen Differentialgleichungssystem gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y(t) &= \exp\left(A(t-t_0)\right) y(t_0) \\ &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Um $\exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right)$ zu berechnen, müssen wir die Matrix A diagonalisieren: Berechnung der Eigenwerte von A:

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (1-\lambda)^2 - 1 \end{aligned}$$

$$P(\lambda) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = 0 \text{ oder } 2$$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 2:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 2 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Berechnung des Eigenvektors zum Eigenwert 0:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \qquad x_1 &= -x_2 \end{aligned}$$

Normierter Eigenvektor zum Eigenwert 0 ist also $\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \exp\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} t\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \exp\left(\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} t\right) \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{0t} \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Aufgabe 40: Bestimmen Sie die Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{y} = y\,,$$

a) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 0\ ,\ \dot{y}(0) = 1$,

b) mit der Anfangsbedingung $y(0) = 1\ ,\ \dot{y}(0) = 0$,

indem Sie die Differentialgleichung umschreiben in ein (zugehöriges) Differentialgleichungssystem erster Ordnung, auf welches Sie dann das Picard-Lindelöf'sche Iterationsverfahren (Diagonalisierung) anwenden.

LÖSUNG:
Um die Differentialgleichung zweiter Ordnung umzuschreiben in ein Differentialgleichungssystem erster Ordnung setzen wir

$$z_0 := y,\ z_1 := \dot{y} \ \Rightarrow \ \begin{array}{l} \dot{z}_0 = \dot{y} = z_1 \\ \dot{z}_1 = \ddot{y} = y = z_0 \end{array}$$

Also ist

$$\dot{z} = \dot{\begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} \dot{z}_0 \\ \dot{z}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_0 \\ z_1 \end{pmatrix} = \mathbf{A}z$$

zu lösen! Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung durch

$$z(t) = e^{\mathbf{A}(t-t_0)} z_0$$

gegeben ist. In unserem Fall gilt $t_0 = 0$ und in (a) $z_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ sowie in (ii) $z_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Dadurch ergeben sich die Lösungen

- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $z(t) = e^{t\mathbf{A}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Wie sieht $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ aus?
Um diese Frage beantworten zu können, diagonalisieren wir die Matrix $\mathbf{A}$ und starten mit der Berechnung der Eigenwerte:

$$\begin{array}{rrcl} & \det(\mathbf{A} - \lambda \mathbb{1}) & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda^2 - 1 & = & 0 \\ \Leftrightarrow & \lambda & = & -1 \quad \text{oder} \quad 1 \end{array}$$

Anschließend berechnen wir die Eigenvektoren zu den Eigenwerten von $\mathbf{A}$:

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} + 1\mathbb{1}) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & -x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert -1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

$$\begin{array}{rrcl} & (\mathbf{A} - 1\mathbb{1})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \Rightarrow & x_1 & = & x_2 \end{array}$$

Zum Eigenwert 1 ergibt sich also ein Eigenvektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Insgesamt erhalten wir

$$\mathbf{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Aus der Vorlesung wissen wir

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} e^{\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}t}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} e^{-t} + e^t & -e^{-t} + e^t \\ -e^{-t} + e^t & e^{-t} + e^t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Alternativ kann man $e^{t\mathbf{A}}$ für $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ auch wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^2 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^3 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \\ \mathbf{A}^4 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^3 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{I} \\ \mathbf{A}^5 &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^4 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{A} \end{aligned}$$

Induktiv:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^0 &= \mathbf{I} = \mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4 = \ldots = \mathbf{A}^{2k} = \mathbf{A}^{2k+2} \\ \mathbf{A}^1 &= \mathbf{A} = \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^5 = \ldots = \mathbf{A}^{2k+1} \quad \text{für } k = 0, 1, 2, 3, \ldots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow e^{t\mathbf{A}} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}\mathbf{A}^k = \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m}}{(2m)!}\right)\mathbf{I} + \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{t^{2m+1}}{(2m+1)!}\right)\mathbf{A} \\ &= \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})\mathbf{I} + \frac{1}{2}(e^t - e^{-t})\mathbf{A} \\ &= \cosh t\mathbf{I} + \sinh t\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Insgesamt erhalten wir folgende Lösungen

- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sinh t \\ \cosh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \sinh t$
- $z(t) = \begin{pmatrix} \cosh t & \sinh t \\ \sinh t & \cosh t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh t \\ \sinh t \end{pmatrix}$
  $\Rightarrow y(t) = \cosh t$

Aufgabe 41: Lösen Sie das folgende Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \dot{y} &= 1 + y^2, \\ y(0) &= a, \end{aligned}$$

wobei $a \in \mathbb{R}$ beliebig ist.

LÖSUNG: Wir lösen das Anfangswertproblem durch Separation der Variablen:

$$\frac{dy}{dt} = \dot{y}(t) = 1 + y(t)^2$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad & \int_a^{y(t)} \frac{1}{1+\tilde{y}^2}\, d\tilde{y} = \int_0^t 1\, ds \\ \Leftrightarrow \quad & \arctan(y(t)) - \arctan(a) = t \\ \Leftrightarrow \quad & y(t) = \tan(t + \arctan(a)) \end{aligned}$$

Zusatzbemerkung: Für welche t ist diese Lösung nun definiert?
arctan ist als Umkehrfunktion von tan auf ganz $\mathbb{R}$ definiert und bildet $\mathbb{R}$ auf das offene Intervall $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ab, denn tan ist auf diesem Intervall streng monoton wachsend daher umkehrbar.
Wenn nun

$$c_0 = \arctan(a) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) ,$$

dann ist $y(t) = \tan(t + c_0)$ definiert für

$$-c_0 - \frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2} - c_0 .$$

Denn für $t \to \frac{\pi}{2} - c_0$ (von unten) bzw. $t \to -\frac{\pi}{2} - c_0$ (von oben) gilt:

$$\tan(t + c_0) \to \pm\infty$$