Aufgabe 42: Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\dot{y} = -y\sin(t) + \sin(2t); \quad y(0) = 1.$$

LÖSUNG: 1) Wir lösen zunächst die homogene Differentialgleichung

$$\dot{y} = -y\ \sin(t)$$

durch Separation der Variablen, bzw. direkt (siehe Skript)

$$\Rightarrow \frac{\dot{y}}{y} = -\sin(t) \quad \Rightarrow \int \frac{\dot{y}}{y}\,dy = -\int \sin(t)\,dt$$

$$\Rightarrow \ln|y| = \cos(t) + c \quad \Rightarrow y(t) = c_h\, e^{\cos(t)} =: y_h(t)\ .$$

2) Eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung gewinnen wir durch die Methode der Variation der Konstanten. Dazu gehen wir aus von dem Ansatz:

$$y_s(t) := c(t)\, y_h(t)\ ,$$

berechnen die Ableitung von $y_s(t)$ und setzen dies in die Differentialgleichung ein:

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, y_h(t) + \dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\ \sin(t) + \sin(2\,t)\ .$$

Es gilt

$$\dot{y_h}(t)\, c(t) = -c(t)\, y_h(t)\ \sin(t)\ .$$

da y_h die homogene Differentialgleichung löst. Also folgt, daß

$$\Rightarrow \dot{c}(t)\, c_h e^{\cos(t)} = \sin(2\,t)\ .$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow c(t) &= \int_0^t \frac{1}{c_h} e^{-\cos(u)}\ \sin(2\,u)\,du \\
&= \frac{2}{c_h}\int_0^t e^{-\cos(u)}\ \cos(u)\ \sin(u)\,du \qquad (\text{Subst. } s = -\cos(u)) \\
&= -\frac{2}{c_h}\int_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} e^s\, s\,ds \qquad (\text{Subst. gibt } \ ds = \sin(u)\,du) \\
&= -\frac{2}{c_h}\, e^s\,(s-1)\Big|_{-\cos(0)}^{-\cos(t)} = \frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\,(\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow y_s(t) &= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\,(\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\right) y_h \\
&= \left(\frac{2}{c_h}\, e^{-\cos(t)}\,(\cos(t)+1) - \frac{4}{c_h e}\right) c_h e^{\cos(t)} \\
&= 2\,(\cos(t)+1) - 4e^{\cos(t)-1}.
\end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung lautet also:

$$y(t) = y_s(t) + y_h(t) = 2\left(\cos(t) + 1\right) - 4e^{\cos(t)-1} + c_h\, e^{\cos(t)} \;.$$

Einsetzen der Anfangswertbedingung ergibt:

$$y(0) = 2(1+1) - 4e^{1-1} + c_h e \overset{!}{=} 1 \quad \Rightarrow c_h\, e = 1 \quad \Rightarrow c_h = \frac{1}{e} \;.$$

Damit lautet die Lösung des Anfangswertproblems schließlich:

$$y(t) = 2\left(\cos(t) + 1\right) - 4e^{\cos(t)-1} + e^{\cos(t)-1} \;.$$

Alternativ: Man kann eine Differentialgleichung der Form

$$\dot{y}(t) = a(t)y(t) + b(t), \text{ mit } y(t_0) = y_0$$

auch mit den folgenden Formeln lösen:

$$\begin{aligned} y_h(t) &= \exp\left(\int_{t_0}^{t} a(s)\, ds\right) \\ c(t) &= \int_{t_0}^{t} \frac{b(s)}{y_h(s)}\, ds + y_0 \\ y(t) &= c(t)y_h(t) \end{aligned}$$

Aufgabe 43: Lösen Sie die Differentialgleichung

$$\dot{y}(t) = \sin(t)y(t) + \sin(t)$$

mit Anfangswert $y(0) = 0$ mit Hilfe von Variation der Konstanten.

Lösung: Zuerst lösen wir die homogene Differentialgleichung

$$\dot{x}(t) = \sin(t)x(t)$$

mit Anfangswert $x(0) = 1$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass die Lösung dieser Differentialgleichung wie folgt aussieht

$$\begin{aligned} x(t) &= \exp\left(\int_0^t \sin(s)\, ds\right) \\ &= \exp\left(-\cos(t) + \cos(0)\right) \\ &= e^{1-\cos(t)} \end{aligned}$$

Des weiteren wissen wir aus der Vorlesung, dass die Lösung der inhomogenen Differentialgleichung mit Anfangswert $y(0) = 0$ gegeben ist durch

$$\begin{aligned} y(t) &= x(t)\left(\int_0^t \frac{1}{x(s)} \sin(s)\, ds\right) \\ &= e^{1-\cos(t)} \int_0^t e^{\cos(s)-1} \sin(s)\, ds \\ &\overset{z:=\cos(s)-1}{=} e^{1-\cos(t)} \left(-\int_0^{\cos(t)-1} e^z\, dz\right) \\ &= -e^{1-\cos(t)} \left(e^{\cos(t)-1} - e^o\right) \\ &= e^{1-\cos(t)} - 1 \end{aligned}$$

Aufgabe 44: Betrachten Sie die Differentialgleichung

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$$

mit den Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 0$.
Lösen Sie diese Differentialgleichung näherungsweise mit MATLAB unter Verwendung

a) des Eulerschen Polygonzugverfahrens

b) des Cauchy-Euler-Verfahrens

für $t \in [0, 2\pi]$. Verwenden Sie die konstante Zeitschrittweite $\tau = \frac{2\pi}{20}$. Zeichen Sie die Lösungskurve und ihre beiden Approximationen. Berechnen Sie für beide Verfahren den Fehler zur Zeit 2π für $\tau = \frac{2\pi}{20}$, $\tau = \frac{2\pi}{40}$ sowie $\tau = \frac{2\pi}{80}$.

LÖSUNG:

```
% compare Euler and Cauchy-Euler ODE solvers
function ode_compare

% initial value
x0 = [1 0];
% end time
T = 2*pi;
% time intervals
N = 20;

% right hand side of ODE
function x_prime = f ( t, x )
x_prime (1) = -x (2);
x_prime (2) =  x (1);
end

% compute one explicit Euler step
function x_new = eulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime = f ( t, x_old );
x_new = x_old + tau * x_prime;
end

% compute one explicit Cauchy-Euler step
function x_new = cauchyeulerstep ( x_old, t, tau )
x_prime_old = f ( t, x_old );
x_mid = x_old + 0.5 * tau * x_prime_old;
x_prime_mid = f ( t + 0.5 * tau, x_mid );
x_new = x_old + tau * x_prime_mid;
end
```

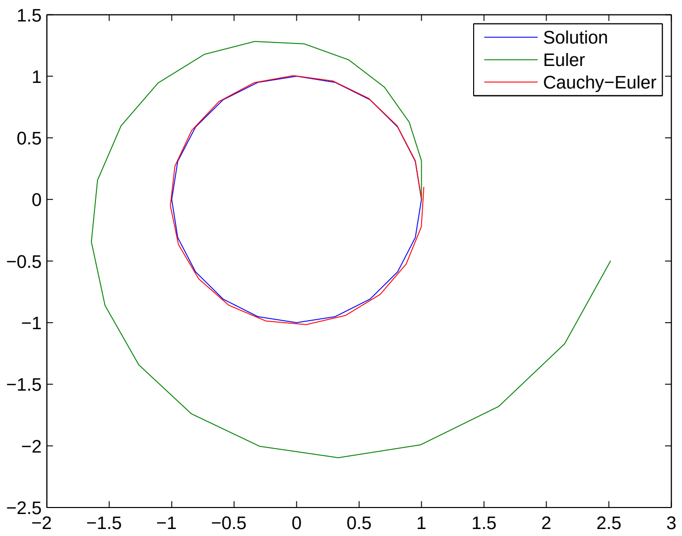
```
% compute timestep size
tau = T / N;
% initialize
xe (1, :) = x0; % Euler solution
xc (1, :) = x0; % Cauchy-Euler solution

% compute time steps with both methods
for i = 1 : N
    xe (i+1, :) = eulerstep (xe (i, :), (i-1) * tau, tau);
    xc (i+1, :) = cauchyeulerstep (xc (i, :), (i-1) * tau, tau);
end

% compute correct solution
ts = 0 : tau : T;
xs (:, 1) = cos (ts);
xs (:, 2) = sin (ts);

% plot results
plot (xs (:, 1), xs (:, 2), xe (:, 1), xe (:, 2), xc (:, 1), xc (:, 2));
legend ('Solution', 'Euler', 'Cauchy-Euler');

% error
euler_error = norm (xs (N, :) - xe (N, :))
cauchy_euler_error = norm (xs (N, :) - xc (N, :))
end
```



Für den Fehler gilt

	$\tau = \frac{2\pi}{20}$	$\tau = \frac{2\pi}{40}$	$\tau = \frac{2\pi}{80}$
Euler	1.4741	0.6118	0.2753
Cauchy-Euler	0.0990	0.0252	0.0064