

**Aufgabe 45:** Die Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sei stetig. Betrachten Sie die durch

$$x(t) := \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \sin(k(t-u)) du$$

definierte Funktion.

- a) Berechnen Sie  $\dot{x}(t)$  und  $\ddot{x}(t)$ .
- b) Zeigen Sie, dass die Funktion  $x = x(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung

$$\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$$

ist und die Anfangswertbedingungen  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  erfüllt.

LÖSUNG:

- a) Nach der Leibniz-Regel für das Ableiten von parameterabhängigen Integralen mit variablen Grenzen (siehe Vorlesung) gilt:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{k} f(t) \sin(k(t-t)) + \frac{1}{k} \int_0^t f(u) \cos(k(t-u)) k du \\ &= \int_0^t f(u) \cos(k(t-u)) du . \end{aligned}$$

Dabei haben wir  $\sin 0 = 0$  benutzt.

Wendet man die Leibniz-Regel nocheinmal an, so erhält man

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= f(t) \cos(k(t-t)) - k \int_0^t f(u) \sin(k(t-u)) du \\ &= f(t) - k^2 x(t) , \end{aligned}$$

wobei wir  $\cos 0 = 1$  beachtet haben.

- b) Offensichtlich ergibt sich aus dem vorhergehenden, daß die Funktion  $x(t)$  eine Lösung der Differentialgleichung  $\ddot{x}(t) + k^2 x(t) = f(t)$  ist.

Die Anfangswertbedingungen  $x(0) = \dot{x}(0) = 0$  ergeben sich ebenfalls unmittelbar (aus der Definition von  $x(t)$  als Integral bzw. der berechneten Formel für  $\dot{x}(t)$  als Integral und der Tatsache, daß

$$\int_a^a g(t) dt = 0$$

ist für jede integrierbare Funktion  $g = g(t)$ ).

**Aufgabe 46:** Bestimmen Sie das Volumen des dreidimensionalen Kegels, der durch folgende Eigenschaften gegeben ist:

- Die Spitze des Kegels liegt im Ursprung.
- Die Mittelachse des Kegels liegt auf der  $x$ -Achse.
- Der Kegel ist begrenzt durch die zur  $y, z$ -Ebene parallele Kreisebene, die ihren Mittelpunkt in  $(L, 0, 0)$  und den Radius  $R$  hat.

LÖSUNG: Der Kegel ist gegeben durch die Menge

$$K = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq L, y^2 + z^2 \leq f^2(x)\}$$

mit  $f(x) = \frac{R}{L}x$ .

Das Volumen dieses Rotationskörpers berechnet sich also wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(K) &= \pi \int_0^L f^2(x) dx \\ &= \pi \int_0^L \frac{R^2}{L^2} x^2 dx = \pi \frac{R^2}{L^2} \frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L \\ &= \frac{1}{3} \pi \frac{R^2}{L^2} L^3 = \frac{1}{3} \pi R^2 L \end{aligned}$$

**Aufgabe 47:** Berechnen Sie durch geschachtelte Integration

- den Flächeninhalt des Einheitsdreiecks, d.h. des Dreiecks mit den Eckpunkten  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,
- das Volumen des Einheitstetraeders, d.h. des Tetraeders mit den Eckpunkten  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ .

LÖSUNG:

- Der Flächeninhalt, bzw. das zweidimensionale Volumen des gegebenen Dreiecks  $D$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned} \text{Vol}(D) &= \int_0^1 \int_0^{1-x} 1 dy dx \\ &= \int_0^1 1 - x dx \\ &= x - \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} - 0 \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

b) Das Volumen des gegebenen Tetraeders  $T$  berechnet sich wie folgt:

$$\begin{aligned}\text{Vol}(T) &= \int_0^1 \int_0^{1-z} \int_0^{1-x-z} 1 \, dy \, dx \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} y \Big|_0^{1-x-z} \, dx \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-z} 1 - x - z \, dx \, dz \\ &= \int_0^1 x - \frac{1}{2}x^2 - zx \Big|_0^{1-z} \, dz \\ &= \int_0^1 \frac{1}{2} - z + \frac{1}{2}z^2 \, dz \\ &= \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{6}\end{aligned}$$

**Aufgabe 48:** Berechnen Sie das Volumen des von den folgenden Flächen begrenzten Körpers

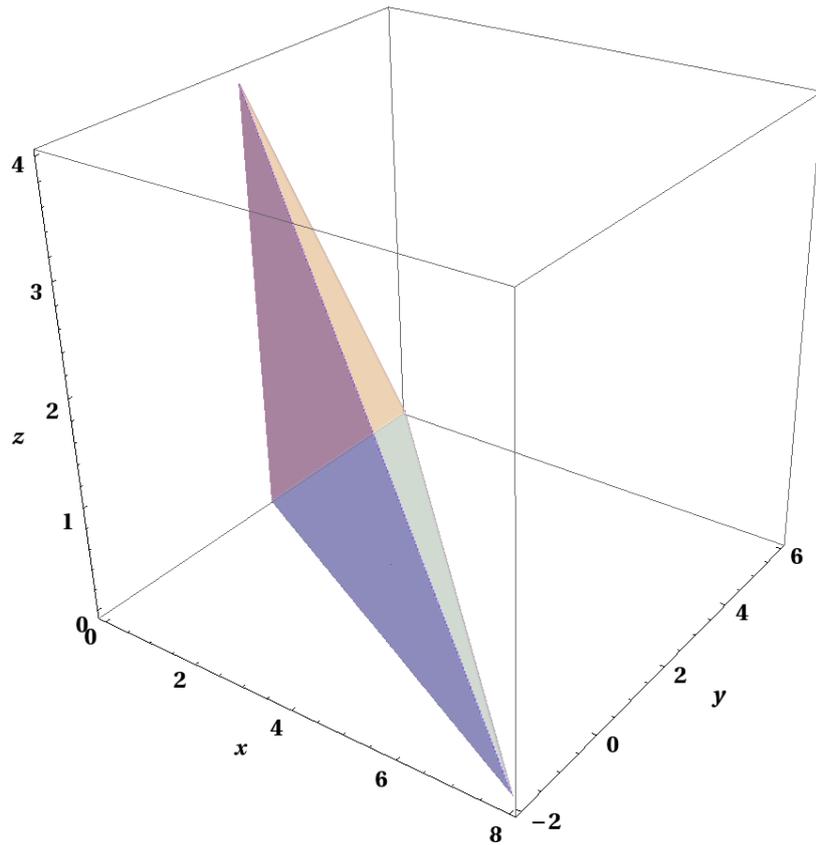
$$x + y + z = 6, \quad x = 0, \quad z = 0, \quad x + 2y = 4,$$

indem Sie das Volumen als Dreifachintegral schreiben.

LÖSUNG:

Bei den drei Flächen handelt es sich um folgende Ebenen:

- $x + y + z = 6$  ist eine Ebene, die durch die Punkte  $(6, 0, 0)^T$ ,  $(0, 6, 0)^T$  und  $(0, 0, 6)^T$  aufgespannt wird.
- $z = 0$  ist die x,y-Ebene.
- $x = 0$  ist die y,z-Ebene.
- $x + 2y = 4$  ist eine zur x,y-Ebene senkrechte Ebene, die durch die Punkte  $(0, 2, 0)^T$  und  $(4, 0, 0)^T$  läuft.



Wir betrachten die Projektion des Körpers in die  $x,y$ -Ebene. Der Körper wird bezüglich der  $z$ -Achse von zwei Flächen begrenzt: Der  $x,y$ -Ebene und der Ebene  $x + y + z = 6$ . Wenn wir zuerst über  $z$  integrieren ergeben sich daher folgende Grenzen für  $z$ .

$$0 \leq z \leq 6 - x - y.$$

Bezüglich der  $x$ -Achse wird der Körper von drei Ebenen begrenzt und bezüglich der  $y$ -Achse von zwei Ebenen. Daher ist es einfacher als nächstes über  $y$  zu integrieren. Die begrenzenden Flächen sind die Ebenen  $x + y + z = 6$  und  $x + 2y = 4$ , wobei die zweite Ebene die untere Grenze festlegt.

$$x + 2y = 4 \iff y = 2 - \frac{x}{2} \quad \dots \text{untere Grenze}$$

$$x + y + z = 6 \iff y = 6 - x - z$$

$$\implies 2 - \frac{x}{2} \leq y \leq 6 - x, \text{ da maximales } y \text{ bei } z = 0$$

Nun fehlen noch die Grenzen für  $x$ . Die untere Grenze für  $x$  ist die  $y,z$ -Ebene und die obere Grenze ist der Schnittpunkt der Ebenen  $x + y + z = 6$ ,  $x + 2y = 4$  und  $z = 0$ .

$$0 \leq x \leq 8$$

Nun können wir das Volumen des Körpers berechnen.

$$\begin{aligned} \text{Vol}_3(K) &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} \int_0^{6-x-y} 1 \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_0^8 \int_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} 6-x-y \, dy \, dx \\ &= \int_0^8 \left[ 6y - xy - \frac{y^2}{2} \right]_{2-\frac{x}{2}}^{6-x} dx \\ &= \int_0^8 8 - 2x + \frac{x^2}{8} \, dx \\ &= \left[ 8x - x^2 + \frac{x^3}{24} \right]_0^8 dx \\ &= \frac{64}{3}. \end{aligned}$$