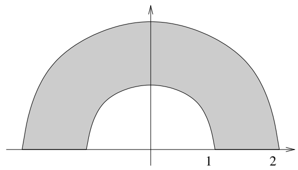
Aufgabe 49: Berechnen Sie den Schwerpunkt des halben Ringes mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2 sowie konstanter Dichte 1:



Aufgabe 50: Gegeben sei ein Kegel der Höhe 5 mit einer Grundfläche von Radius 1 und konstanter Dichte 1. Berechnen Sie den Schwerpunkt dieses Kegels.

Aufgabe 51: Wir betrachten ein Rohr

$$R = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, z \in [0, 10] \text{ und } \sqrt{x^2 + y^2} \in \left[1, \frac{6}{5}\right] \right\},$$

bei dem das Wandmaterial die Dichte

$$\rho(x, y, z) = \frac{z + 4}{x^2 + y^2}$$

hat. Berechnen Sie die Masse des Rohres

$$\int_R \rho(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Aufgabe 52:

a) Weisen Sie, unter Verwendung von Resultaten aus der Vorlesung, nach, dass das Trägheitsmoment Θ_L einer Kugel der Masse M mit Radius R und Dichte $\rho \equiv 1$ gegeben ist durch:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, R^2$$

b) Berechnen Sie das Trägheitsmoment eines Rotationsellipsoids mit Dichte $\rho \equiv 1$ bezüglich der z-Achse. Dabei entstehe das Ellipsoid durch Rotation der Ellipse $\left\{ (x, z) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1 \right\}$ um die z-Achse.
Tipp: Verwenden Sie eine Transformation um das Ellipsoid auf eine Kugel abzubilden. Nutzen Sie anschließend geeignete Koordinaten zur Integration.
Es gilt $\sin^3 x = \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x$.

c) Verwenden Sie das in der Vorlesung berechnete Volumen des Rotationsellipsoids, um nachzuweisen, dass man das Trägheitsmoment eines Rotatiosellipsoids mit konstanter Dichte folgendermaßen schreiben kann:

$$\Theta_L = \tfrac{2}{5}\, M\, a^2$$