Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 2 — Abgabe: 17 Juni 2015

Aufgabe 1

Zu $f \in C^0([0,1])$ definiere

$$f_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f\left(\frac{i}{n}\right) B_i^n(x)\,,$$

wobei B_i^n das i-te Bernsteinpolynom von Grad n bezeichnet. Zeigen Sie, dass gilt:

1. Für $f(x) = 1$ ist $f_n(x) = 1$.
2. Für $f(x) = x$ ist $f_n(x) = x$.
3. Für $f(x) = x(1-x)$ ist $f_n(x) = (1 - \frac{1}{n})x(1-x)$.
4. $\sum_{i=0}^{n}(x - \frac{i}{n})^2 B_i^n(x) \leq \frac{1}{4n}$.

Hinweis: Zum Beweis von 4. verwenden Sie 1.,2.,3. und die Darstellung

$$t^2 = -t(1-t) + t.$$

Aufgabe 2 (Approximationssatz von Weierstraß)

Zeigen Sie, dass jede auf $[0, 1]$ stetige Funktion f gleichmäßig durch Polynome approximiert werden kann.

Hinweis: Es sei f beschränkt und gleichmäßig stetig, d.h.

$$\forall \epsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall x, y : \;\; |x - y| < \delta \; \Rightarrow \; |f(x) - f(y)| < \frac{\epsilon}{2} \, .$$

Betrachten Sie nun für festes x die Indexmengen

$$R_n^\delta := \left\{ i \;\middle|\; 0 \le i \le n, \;\; \left| x - \frac{i}{n} \right| < \delta \right\}, \quad Q_n^\delta := \left\{ i \;\middle|\; 0 \le i \le n, \;\; \left| x - \frac{i}{n} \right| \ge \delta \right\}$$

und verwenden Sie Aufgabe 1.

Aufgabe 3

Beweisen Sie die Ableitungsformel (Satz 1.7. aus der Vorlesung)

$$\frac{d}{d\lambda} B_i^n(\lambda) = n \left(B_{i-1}^{n-1}(\lambda) - B_i^{n-1}(\lambda) \right) ,$$

mit Hilfe der rekursiven Darstellung der Bernsteinpolynome.

Aufgabe 4

Zeigen Sie: Gibt man im Kontext kubischer Splines neben den Interpolationsbedingungen $s(t_i) = f(t_i)$ für $i = 0, \ldots, l + 1$ auch *Randbedingungen*

(i) $s'(a) = f'(a)$, $s'(b) = f'(b)$ (eingespannte Splines) oder

(ii) $s''(a) = s''(b) = 0$ (natürliche Randbedingung) oder

(iii) $s'(a) = s'(b)$, $s''(a) = s''(b)$ (z.B. zusammen mit $s(a) = s(b)$ für periodische Funktionen f)

vor, so existiert eine eindeutige Splineinterpolation $s \in S_{4,\Delta}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Optimalität der kubischen Splines.