Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universität bonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 4 — Abgabe: 1. Juli 2015

Aufgabe 1 (Dirichletproblem in 1D) — 4 Punkte

Für ein $N \in \mathbb{N}$ definiere Stützstellen $x_i = ih$ mit $h = N^{-1}$ und $i = 0, \ldots, N$. Eine Funktion $u \in C([0,1])$ kann approximiert dargestellt werden durch eine Folge $(u_h^i)_{i=0,\ldots,N}$ mit $u_h^i \approx u(x_i)$. Definiere nun den diskreten Differenzenoperator

$$\partial_h^- u_h^i = \frac{u_h^i - u_h^{i-1}}{h}\,.$$

Für ein $f \in C([0,1])$ ist eine diskrete Energie (*Dirichlet*-Energie) definiert durch

$$E_h[u_h] = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2}\,|\partial_h^- u_h^i|^2\, h - f(x_i)\, h\, u_h^i\,.$$

(*Bemerkung:* Dies stellt eine Approximation an die kontinuierliche Dirichlet-Energie $E[u] = \int_0^1 \frac{1}{2}|u'(x)|^2 - f(x)u(x)\,\mathrm{d}x$ für $u \in C^1([0,1])$ dar.)

(a) Zeigen Sie: Unter den Randbedingungen $u_h^0 = u_h^N = 0$ existiert ein Minimierer von E_h.

(b) Geben Sie ein Gleichungssytem an, um den Minimierer von E_h zu berechnen.

(c) Vergleichen Sie das Gleichungssytem aus (b) mit dem für Federketten in Kapitel 2.1.

Aufgabe 2 (Schwingung einer Federkette) **4 Punkte**

Die Schwingung einer Federkette wird beschrieben durch die Gleichung

$$\partial_t^2 \mathbf{U} + A_h \mathbf{U} = \mathbf{0},$$

für $\mathbf{U} = \mathbf{U}(t) = (u^1(t), \ldots, u^N(t)) \in \mathbb{R}^N$, wobei $u^0(t) = u^{N+1}(t) = 0$. Die Eigenwerte bzw. Eigenvektoren von A_h seien gegeben durch $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ und $\mathbf{U}_1, \ldots, \mathbf{U}_N$. Leiten Sie aus dem Ansatz

$$\mathbf{U}(t) = \sum_{i=1}^{N} \phi_i(t) \mathbf{U}_i$$

und gegebenen Anfangswerten $\mathbf{U}(0)$ und $\mathbf{U}'(0)$ eine Darstellung der Lösung her.

Aufgabe 3 (Differenzenquotienten höherer Ordnung) **4 Punkte**

(a) Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von Taylor:

$$\lim_{h \to 0} \frac{(-f(x+2h) + 4f(x+h) - 3f(x))}{2h} = f'(x)$$

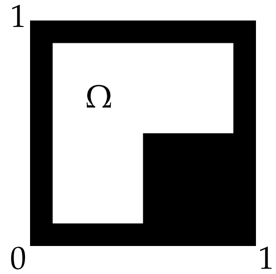
(b) Zeigen Sie, dass mit der Formel aus (a) Polynome vom Grad 2 exakt differenziert werden.

Programmieraufgabe 2 (Abgabe in der Woche 6. - 10. Juli 2015)

Sei $\Omega \subset [0,1]^2$ ein L-förmiges Gebiet und $f \equiv 1$. Lösen Sie

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

unter Verwendung einer Finite-Differenzen-Diskretisierung.



Verfahren Sie wie folgt:

1. Das Rechengebiet $D = [0,1]^2$ wird uniform durch die Knotenmenge $x_{ij} = (ih, jh)$ für $0 \leq i, j \leq N$ und $h = N^{-1}$, $N \in \mathbb{N}$, diskretisiert.
2. Das (weiße) Gebiet Ω wird diskretisiert durch eine Teilmenge der Knoten x_{ij}, wobei $0 < i, j < N$ gelten soll. Genauer: Ω wird beschrieben durch ein Feld χ_{ij} mit $\chi_{ij} = 1$ falls $x_{ij} \in \Omega$ und $\chi_{ij} = 0$ sonst.
3. Die diskrete Lösung U wird beschrieben durch ein Feld U_{ij} mit $i, j = 0, \ldots, N$. Dises wird mit $U_{ij} = 0$ initialisiert, damit sind die Randwerte vorgegeben.
4. Zu implementieren ist die **Anwendung der Diskretisierungsmatrix** zu $-\Delta$ auf einen Knotenvektor U (ohne die Matrix zu assemblieren!). Dabei iteriert man über das gesamte Feld U, identifiziert innere Knoten (d.h. $\chi_{ij} = 1$) und nutzt auf diesen den Differenzenstern
$$\frac{1}{h^2}\begin{bmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 & -1 \\ & -1 & \end{bmatrix}.$$
5. Zur Lösung des Gleichungssystems implementieren Sie das **CG-Verfahren**.
6. Stellen Sie die Lösung U graphisch dar.

Hinweis: Auf der Homepage finden Sie ein Progammfragment in C++, welches die Gitterverwaltung und Erstellung der Maske χ (d.h. 1. - 3.), sowie Output-Routinen zur Verfügung stellt. Insbesondere kann die als ppm-File herausgeschriebene Lösung durch Aufruf der Mathematica Routine `plot.nb` visualisiert werden.