Institut für Numerische Simulation
Rheinische Friedrich-Wilhelms-Universität Bonn

universitätbonn

Übungen zu Algorithmische Mathematik II (V1G6)

Sommersemester 2015

Prof. Dr. Martin Rumpf — Dr. Orestis Vantzos — Dipl.-Math. Behrend Heeren

Übungsblatt 5 — Abgabe: 8. Juli 2015

Aufgabe 1 — 4 Punkte

Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ sei $|||\mathbf{A}|||_2$ die durch die euklidische Norm auf $\mathbb{R}^n$ definierte Operatornorm auf $\mathbb{R}^{n,n}$, und $||\mathbf{A}||_F := \left(\sum_{i,j=1}^n |a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}$ die Frobenius-Norm. Zeigen Sie:

(i) $|||\mathbf{A}|||_2 = \sqrt{\rho(\mathbf{A}^T\mathbf{A})}$, wobei $\rho(\mathbf{B}) := \max_i |\lambda_i|$ für λ_i Eigenwerte von $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Hinweis: Benutzen Sie die Polarzerlegung $\mathbf{A} = \mathbf{R}\mathbf{U}$, wobei $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n,n}$ orthogonal und $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n,n}$ symmetrisch ist.

(ii) $|||\mathbf{A}|||_2 \leq ||\mathbf{A}||_F \leq \sqrt{n}|||\mathbf{A}|||_2$.

Aufgabe 2 — 4 Punkte

Zeigen Sie $|||\mathbf{A}|||_\infty = \max_{1\leq i\leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$.

Aufgabe 3 **4 Punkte**

Sei $f \in C([0,1])$. Betrachten Sie die Gleichung

$$-u''(x) = f(x)\,, \quad x \in [0,1]\,,$$

mit Randdaten $u(0) = u_0$ und $u(1) = u_1$.

(a) Geben Sie eine explizite Lösung der Gleichung an. Verfahren Sie dabei wie folgt: Berechnen Sie eine Funktion $\tilde{u}$ durch zweimaliges Aufintegrieren von f und berechnen Sie u als eine affin-lineare Korrektur von $\tilde{u}$.

(b) Sei $u \in C^2([0,1])$ eine Lösung der Gleichung für konstantes f. Für $N \in \mathbb{N}$ betrachten wir die uniforme Diskretisierung $x_i = ih$ für $i = 0, \ldots, N$ und $h = N^{-1}$. Sei u_h die Gitterfunktion der diskreten Lösung, d.h. $-\partial_h^- \partial_h^+ u_h = f$, $u_h(0) = u_0$, $u_h(1) = u_1$. Zeigen Sie, dass $u_h(x_i) = u(x_i)$ gilt.

Aufgabe 4 **4 Punkte**

(i) Zeigen Sie, dass im $\mathbb{R}^2$ der Laplace-Operator Δ in Polarkoordinaten (r, ϕ), welche durch

$$(x, y) = \Phi(r, \phi) = (r\cos(\phi), r\sin(\phi))$$

definiert sind, wie folgt geschrieben werden kann:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\,.$$

Hinweis: Es gilt $(D\Phi)^{-1} = D\Phi^{-1} \circ \Phi$.

(ii) Weisen Sie mit Hilfe von (i) nach, dass die Funktion $u(r, \phi) := r^{\frac{2}{3}} \sin(\frac{2}{3}\phi)$ im Gebiet $G := (-1,1) \times (-1,1) \setminus ([0,1] \times [-1,0])$ die Gleichung

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } G,$$

erfüllt, aber im Nullpunkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist.